

# Nichtlineare Beobachtung bei Parallelrobotern zur Integration adaptronischer Gelenke

Von der Fakultät für Elektrotechnik, Informationstechnik, Physik  
der Technischen Universität Carolo-Wilhelmina zu Braunschweig

zur Erlangung der Würde

eines Doktor-Ingenieurs (Dr.-Ing.)

genehmigte Dissertation

von

Dipl.-Ing. Michael Kolbus

aus Bünde

Eingereicht am:	24. September 2010
Mündliche Prüfung am:	23. August 2011
Berichterstatter:	Prof. Dr.-Ing. W. Schumacher
Mitberichterstatter:	Prof. Dr.-Ing. habil. Dr. h.c. F. Palis

2011



# Danksagung

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Regelungstechnik der Technischen Universität Carolo-Wilhelmina zu Braunschweig. Mein besonderer Dank gilt daher dem Institutsleiter Herrn Prof. Dr.-Ing. Walter Schumacher für die Ermöglichung dieser Arbeit und dem entgegengebrachten Vertrauen zur Bearbeitung der Projekte im Sonderforschungsbereich 562 – Parallelroboter für Handhabung und Montage. Weiterhin danke ich Herrn Prof. Dr.-Ing. habil. Dr. h.c. Frank Palis für die Übernahme des Koreferates und Herrn Prof. Dr.-Ing. Harald Michalik für die Übernahme des Vorsitzes der Prüfungskommission.

Ein herzliches Dankeschön gilt meinen ehemaligen Kollegen am Institut für Regelungstechnik für das stets angenehme Arbeitsklima und die Bereitschaft zu Diskussionen diesseits und jenseits der Regelungstechnik. Hier möchte insbesondere meine ehemaligen Bürokollegen Thomas Reisinger, Frank Wobbe und Marcus Gerbrandt erwähnen. Frank Schreiber danke ich für die sorgfältige Durchsicht der Arbeit. Einschließen in den Kollegenkreis möchte ich auch alle Mitarbeiter im Sonderforschungsbereich. Hervorzuheben sind hier Christoph Budde und Jochen Maaß deren Arbeiten großen Anteil daran hatten, dass die Versuchsträger zur Verfügung standen.

Schließlich bedanke ich mich bei meinen Eltern, die mich immer unterstützt haben und mir in schwierigen Zeiten stets zur Seite standen. Ohne sie hätte ich meine Ausbildung, die diese Arbeit erst ermöglicht hat, so nicht machen können.

Herzogenaurach im September 2011

Michael Kolbus



---

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
1.1	Parallelroboter . . . . .	1
1.2	Handlungsbedarf . . . . .	2
1.3	Zielsetzung . . . . .	3
1.4	Stand der Technik . . . . .	4
1.5	Inhalt der Arbeit . . . . .	6
<b>2</b>	<b>Steuerungsarchitektur im Sonderforschungsbereich</b>	<b>7</b>
<b>3</b>	<b>Reibung in passiven Gelenken</b>	<b>11</b>
3.1	Funktionsweise der adaptronischen Gelenke . . . . .	12
3.2	Angenommenes Reibmodell . . . . .	12
3.2.1	Geschwindigkeitsunabhängige Reibung . . . . .	15
3.2.2	Geschwindigkeitsabhängige Reibung . . . . .	16
3.2.3	Gesamtes Modell . . . . .	17
<b>4</b>	<b>Detektion der Reibkraft</b>	<b>19</b>
4.1	Art der Detektion . . . . .	20
4.1.1	Die Modellierung des Systems . . . . .	20
4.2	Beobachtbarkeit des Systems . . . . .	23
4.2.1	Untersuchung der Beobachtbarkeit des vereinfachten Systems . . . . .	31
4.2.2	Beobachtbarkeit des vollständigen Systems . . . . .	34
4.2.3	Beobachtbarkeit im Falle mehrerer Gelenkfreiheitsgrade . . . . .	36
4.3	Beobachter mit hohen Verstärkungen . . . . .	41
4.4	Normalformbeobachter . . . . .	43
4.4.1	Anwendung des Normalformbeobachters zur Reibungsdetektion . . . . .	45
4.5	Erweiterung auf Siegel Domain Beobachter . . . . .	56
4.5.1	Beobachtung der Coulombschen Reibung . . . . .	59
4.5.2	Beobachtung der geschwindigkeitsproportionalen Reibung . . . . .	75
4.6	Zusammenfassung der Beobachterttypen . . . . .	77

4.7	Diskretisierung des Beobachters . . . . .	78
<b>5</b>	<b>Regelungstechnische Nutzung der Informationen</b>	<b>81</b>
5.1	Kompensation der Reibkräfte . . . . .	81
5.2	Modifizierte Trajektoriengenerierung . . . . .	85
5.3	Vergleich zwischen Kompensation und Trajektorienanpassung . . . . .	93
5.4	Regelung der adaptronischen Gelenke . . . . .	94
5.4.1	Stabilität bei Beobachtung im Regelkreis . . . . .	95
<b>6</b>	<b>Experimentelle Ergebnisse</b>	<b>107</b>
6.1	Versuchsaufbau . . . . .	107
6.2	Einsatz in der Simulation . . . . .	108
6.3	Einsatz am Roboter . . . . .	115
<b>7</b>	<b>Zusammenfassung</b>	<b>121</b>
<b>A</b>	<b>Matrixdifferentialrechnung</b>	<b>123</b>
<b>B</b>	<b>Eigenwerte</b>	<b>129</b>
<b>C</b>	<b>Modellierung des Versuchsträgers</b>	<b>133</b>
C.1	Kinematik des Roboters . . . . .	133
C.2	Kinetik des Roboters . . . . .	135
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>137</b>

# Symbolverzeichnis

Verzeichnis der im Text verwendeten Symbole und Abkürzungen:

## Allgemeines

$a$	Skalar
$\mathbf{a}$	Vektor
$\mathbf{A}$	Matrix
$\mathcal{A}$	Mannigfaltigkeit
$\mathbb{N}$	Menge der natürlichen Zahlen
$\mathbb{R}$	Menge der reellen Zahlen
$\mathbf{I}$	Einheitsmatrix
$\ \mathbf{a}\ _2$	2-Norm des Vektors $\mathbf{a}$
$\ \mathbf{A}\ _2$	2-Norm der Matrix $\mathbf{A}$
$\det(\mathbf{A})$	Determinante der Matrix $\mathbf{A}$
$\text{diag}(\mathbf{a})$	Diagonalmatrix vom Vektor $\mathbf{a}$
$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$	Skalarprodukt der Vektoren $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$
$f(x)$	Funktion von $x$
$\nabla f(\mathbf{x})$	Gradient der Funktion $f$ nach $\mathbf{x}$
$(f \circ g)(x)$	Verkettung der Funktionen $g$ und $f$
$L_f^n(g)$	n-te Lie-Ableitung von $g$ entlang von $f$

## Reibungsrelevante Größen

$\mathbf{v}_{\text{reib}}$	Relative Geschwindigkeit zwischen den Oberflächen
$v_{\text{reib},n}$	Einheitenlose relative Geschwindigkeit zwischen den Oberflächen
$F_{\text{reib}}$	Allgemeine Reibkraft
$F_c$	Betrag der Coulombschen Reibkraft
$F_N$	Normalkraft
$\mu_0$	Haftzahl

$F_v$	Faktor der viskosen Reibkraft
$m_v$	Steigung der viskosen Reibung
$F_s$	Reibkraftkomponente durch den Strybeck-Effekt
$v_s$	Charakteristische Geschwindigkeit des Strybeck-Effekt

## Mechanische Modellbildung

$\mathbf{q}$	Vektor der verallgemeinerte Koordinaten
$\mathbf{M}_q$	Trägheitsmatrix des Roboters in $\mathbf{q}$
$\mathbf{C}_q$	Coriolismatrix des Roboters in $\mathbf{q}$
$\mathbf{g}_q$	Gravitationsvektor des Roboters in $\mathbf{q}$
$\boldsymbol{\eta}$	Vektor der Zusatzkräfte $(\mathbf{C}_q \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}_q)$
$\boldsymbol{\tau}_d$	Verallgemeinerte Antriebskräfte/-momente
$\boldsymbol{\sigma}_r$	Reibkräfte/-momente
${}^\sigma \mathbf{J}_q$	Jakobimatrix von Raum der Reibkräfte nach $\mathbf{q}$
$n_{dof}$	Freiheitsgrade des Roboters

## Beobachtbarkeitsanalyse und Beobachterentwurf

$\mathbf{f}_x$	Driftfeld der nichtlinearen Zustandsdifferentialgleichung
$\mathbf{G}_x$	Eingangsmatrix
$\mathbf{h}_x$	Ausgangsabbildung
$n$	Freiheitsgrade des gesamten Zustandsraumes
$n_f$	Anzahl der Reibbehafteten Momente
$p$	Dimension des Ausgangs
$q$	Dimension des Eingangs
$\mathcal{M}$	Systemmanigfaltigkeit
$\mathcal{O}$	Beobachtbarkeitsraum (observability Space)
$\mathbf{q}$	Beobachtbarkeitsabbildung
${}^{xxx} \mathbf{x}$	Zustandsvektor in entsprechenden Koordinaten
${}^{xxx} \hat{\mathbf{x}}$	Geschätzter Zustandsvektor in entsprechenden Koordinaten
$zrd$	Aus Differentialgleichung abgeleitete Darstellung
$bk$	Nichtlineare Beobachtbarkeitsnormalform



$bnf$	Nichtlineare Beobachternormalform
$enf$	Erweiterte nichtlineare Beobachternormalform
$A$	Linearer Anteil des Zustandsraums in $enf$
$\varphi$	Nichtlinearer additiver Term des Zustandsraums in $enf$
$^{enf}\mathbf{w}_{zrd}$	Diffeomorphismus zwischen Darstellungen

## Regelungstechnik

$\tau_u$	Vom Starrkörperregler erzeugtes Moment
$\tau_f$	Durch Kompensation bestimmtes Moment
$\mathcal{H}$	Speicherfunktion eines Systems
$V$	Lyapunovfunktion

## Abkürzungen

SISO-System	Eingrößensystem
$PT_n$	Verzögerungsglied der Ordnung $n$
PD	Proportional Differenzierendes Element
$PT_1D$	Proportionalelement mit Verzögerung und Vorhalt
PI	Proportional und Integrierendes Element
PID	Proportional und Integrierendes und Differenzierendes Element
NBKNF	Nichtlineare Beobachtbarkeitsnormalform
NBNF	Nichtlineare Beobachternormalform
ENBNF	Erweiterte nichtlineare Beobachternormalform

## Kurzfassung

In dieser Arbeit wird die nichtlineare Zustandsschätzung bei mechatronischen Systemen am Beispiel von Parallelrobotern beschrieben. Das Hauptziel ist, die Reibkräfte und -momente in den Gelenken des Roboters zu detektieren und diese für regelungstechnische Zwecke zur Verfügung zu stellen. Das entwickelte Verfahren zur Beobachtung erlaubt die Bestimmung veränderlicher Reibmomente in den Gelenken unter Einbeziehung des vollständigen Robotermodells. Ein besonderer Fokus liegt dabei auf der Nutzbarkeit der Informationen zur Steuerung adaptronischer Gelenke, so dass sich das hier entwickelte Verfahren von adaptiven Ansätzen abhebt.

Die Herleitung der Methoden nutzt die besondere Struktur der Modelle mechatronischer Systeme aus. Ein Schwerpunkt liegt auf der genauen Untersuchung der Beobachtbarkeit der gesuchten Reibmomente des Systems und die sich daraus ergebenden Bedingungen beim Entwurf. Das vorgestellte Verfahren basiert auf der Transformation des Systems und nutzt die Methoden der Differentialgeometrie zur Analyse nichtlinearer Systeme aus. Der hier entwickelte Ansatz unterscheidet sich von denen der klassischen Form zur Beobachterentwicklung und bietet systemunabhängig eine globale Konvergenz in den geschätzten Größen. Die erzielte Fehlerdynamik ist dabei linear. Die Schließung des Regelkreises über die geschätzten Zustände wird untersucht, um die zur Stabilität notwendigen Bedingungen an die Entwurfsparameter zu definieren.

Die theoretischen Ergebnisse sind in Simulation und am Versuchsträger verifiziert. Dazu wurde die Schätzung der Parameter an einem Parallelroboter mit zwei Freiheitsgraden durchgeführt. Das Verfahren wurde nachträglich in die bestehende Steuerungsstruktur integriert und zur Schätzung der Parameter verwendet. Dazu wurden die bereits vorhandenen Messwerte benutzt, zusätzliche Sensoren wurden nicht in das System eingebracht.

## Abstract

This thesis presents a method for non-linear state estimation in parallel kinematic machines. These machines serve as an example for a more general class of mechatronical systems that are described by similar equations. The main objective of this work is to detect the varying torques and forces that are induced by friction within joints. This state information is supposed to be fed back into the control system in order to maintain the performance of the controller. Furthermore, the information gained by the observer has to be utilizable as input for the control of adaptronic joints. The potential use of the state information as the control variable in closed control loops is the major difference to adaptive concepts.

The derivation of the observer exploits the special structure of the dynamic equations of mechatronic systems. Methods from differential geometry are applicable to the differential equations and allow the transformation to more convenient descriptions of the nonlinear system. The observability of the system is analyzed in detail. Consequently, conditions for non-linear observer design are derived. The concept presented here differs from the classical non-linear observer and allows the estimation of friction without further restrictions to the systems parameters, while achieving global convergence. The error dynamics are described by linear differential equations. Stability of closed loop control using the estimated states is analyzed and necessary conditions are derived.

Afterwards, the theoretical results are verified in simulation and on a real system. The observer was implemented and integrated in an existing control setup of a two dimensional parallel robot. Without installing additional sensors the derived observer provides the targeted states.



# 1 Einleitung

Die Automatisierung von Prozessen in der Industrie gilt nach wie vor als eine der Schlüsseltechnologien für europäische Unternehmen, um im weltweiten Markt konkurrenzfähig produzieren zu können, vergleiche [1]. Die wirtschaftliche Bedeutung der Automation für den deutschen Markt lässt sich an Hand der Umsatzzahlen festmachen. Trotz des im Jahre 2009 prognostizierten deutlichen Einbruchs im Gesamtumsatz ist ein erneutes Wachstum in den Folgejahren vorhergesagt. Der Anteil der Robotik am Gesamtvolumen im Bereich Automation stellt mit 25 % einen erheblichen Anteil, dessen größter Teil auf den Bereich Handhabung und Montage entfällt. Industrieroboter stellen damit einen wichtigen Faktor in der deutschen Industrielandschaft dar. Mit Industrierobotern sind in diesem Zusammenhang frei programmierbare Handhabungseinrichtungen bezeichnet, die mit Greifern oder Werkzeugen am Endeffektor ausgestattet sind und mehrere Bewegungsfreiheitsgrade besitzen, siehe [2].

Der Einsatz von Robotern im Bereich der Handhabung und Montage fordert die Kombination der Eigenschaften von niedriger Zykluszeit und Präzision. Diese fortschreitenden Anforderungen lassen sich zum einen durch stetig verbesserte Komponenten in existierenden Robotern erfüllen oder durch die Nutzung anderer Strukturen und den Einsatz neuer Komponenten. Der Sonderforschungsbereich 562 „Robotersysteme für Handhabung und Montage – Hochdynamische Parallelstrukturen mit adaptronischen Komponenten“ befasst sich mit der Erforschung von Konzepten für Parallelroboter, um den genannten Anforderungen Rechnung zu tragen. Die kinematische Struktur von Parallelrobotern begünstigt die oben aufgeführten Punkte, Präzision und hohe Dynamik, die letztlich zu geringen Zykluszeiten führen [3].

## 1.1 Parallelroboter

Wie bereits im vorigen Abschnitt erwähnt, weisen Parallelroboter strukturelle Eigenschaften auf, die die Koppelung von Präzision und Dynamik ermöglichen. Demgegenüber stehen eine eingeschränkte Positionierbarkeit des Endeffektors sowie ein ungünstiges Verhältnis von Bau- und Arbeitsraum. Parallelroboter unterscheiden sich von seriellen Robotern durch das Vorhandensein geschlossener kinematischer Ketten. Ein Beispiel mit zwei Freiheitsgraden ist in Abbildung 1.1 illustriert. Die geschlossenen Ketten ermöglichen eine präzise Positionierung des Endeffektors, da sich Positionsfehler in den Antrieben nicht additiv überlagern [3].

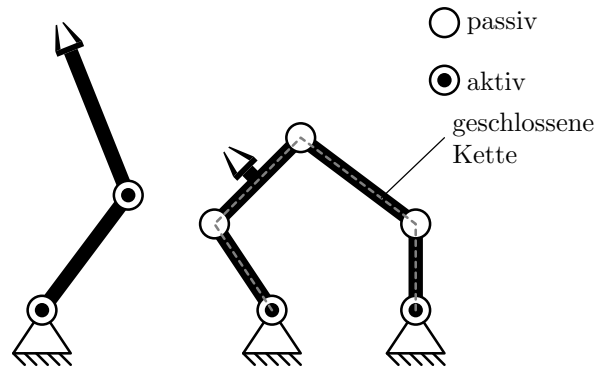


Abbildung 1.1: Gegenüberstellung serielle und parallele Kinematik

Gleichzeitig ergibt sich aus dem erzeugten Kraftfluss eine höhere Steifigkeit der Struktur im Vergleich zu ähnlich dimensionierten seriellen Robotern. Dies ermöglicht die Verwendung leichter Strukturen für die gleiche Nutzlast am Endeffektor. In Kombination mit der Option die Antriebe bei Parallelrobotern sämtlich an der Basis des Systems anbringen zu können, resultiert dies in deutlich reduzierten Massen im Vergleich zu seriellen Strukturen. Die Antriebe müssen nicht von ihren Vorgängern wie bei seriellen Strukturen mit bewegt werden. Daraus ergeben sich die für kurze Zykluszeiten notwendigen dynamischen Eigenschaften der parallelen Kinematiken [4]. Ein weiteres Merkmal paralleler Kinematiken ist das Vorhandensein passiver Gelenke in der Struktur, siehe Abbildung 1.1. Diese erlauben das Einbringen zusätzlicher Komponenten, wie zum Beispiel halbaktive Gelenke, deren Spiel und damit die Reibung aktiv beeinflusst werden kann.

Diesen Vorteilen stehen auch einige Nachteile gegenüber. Die für den Einsatz im Bereich Handhabung und Montage wichtigsten sind die geringe Orientierbarkeit des Endeffektors und mögliche Singularitäten im Arbeitsraum. Im Gegensatz zu seriellen Kinematiken gewinnen die Parallelstrukturen Freiheitsgrade in diesen Positionen. Dies führt zum Verlust der Steifigkeit, das System ist in diesen Posen unterbestimmt. Dennoch existieren im Bereich der Handhabung und Montage Szenarien, in denen die eingangs erwähnten Eigenschaften der Systeme die Nachteile überkompensieren und der Einsatz von Parallelrobotern bzw. hybrider Strukturen dem rein serieller vorzuziehen ist. Die Ansätze, die im Sonderforschungsbereich 562 entwickelt und umgesetzt worden sind, erlauben zudem die Kompensation einiger der strukturell bedingten Nachteile, wie z.B. der Konfigurationswechsel zur Verbesserung des Verhältnisses von Arbeitsraum zu Bauraum [5].

## 1.2 Handlungsbedarf

Die Realisierung hochdynamischer Fahrten mit Parallelrobotern setzt eine exakte und zuverlässige Regelung voraus, deren Realisierung unweigerlich ein präzises Modell des Roboters

fordert. Dieses ist notwendig, um die erforderlichen Stellgrößen zu generieren, die die Einhaltung der Bahn bei Fahrten gewährleisten. Tritt Reibung in den Antrieben oder Gelenken des Roboters auf, so ist diese im Gegensatz zu den kinematischen und dynamischen Parametern wie Längen und Massen bzw. Trägheiten unbekannt und zeitlich variant. Um weiterhin eine präzise Regelung des Systems bei hoch dynamischen Fahrten zu ermöglichen, muss diesen Einflüssen Rechnung getragen werden. In [6] wird die Reibung der Getriebemotoren adaptiert, um die Qualität der Regelung zu verbessern. In diesem Fall werden quasi-stationäre Reibgrößen vorausgesetzt.

Die Kombination aus hoher Steifigkeit und geringer Masse führt neben den herausragenden dynamischen Eigenschaften der Systeme auch zu höheren Eigenfrequenzen der Struktur. Zudem kommen meist Direktantriebe zum Einsatz. Dies führt zu Strukturen, die eine geringe Dämpfung der eigenen Strukturmoden besitzen. Im Zusammenspiel mit den applizierten hohen Beschleunigungen führt dies zu vermehrtem Auftreten von Strukturschwingungen im Betrieb [7]. Zur präzisen Positionierung eines Bauteils im Kontext der Handhabung und Montage kann dies bedeuten, dass das Abklingen der Schwingung unter eine Toleranzschwelle abgewartet werden muss. Dies reduziert die durch die hohe Dynamik gewonnene Zeitersparnis und führt im schlimmsten Fall zu längeren Zykluszeiten. Daher existieren Ansätze durch aktive Komponenten die Dämpfung im System zu erhöhen. Eine Variante sind dabei adaptronische Gelenke. Diese erlauben durch die Einbringung von zusätzlicher Reibung in das System die Abklingzeiten der Strukturschwingungen zu verkürzen. Durch die aktiv eingebrachte Reibung ist diese nicht mehr länger als quasi-stationär anzusehen, dennoch hat sie signifikante Auswirkungen auf die Charakteristik des Parallelroboters, da unter Umständen hohe Kräfte entstehen, die nicht mehr nur parasitär wirken. Ihr Einfluss ist im Sinne einer präzisen Regelung zu kompensieren.

## 1.3 Zielsetzung

Die vorliegende Arbeit entstand im Rahmen des Sonderforschungsbereiches 562. Ziel dieses Forschungsprojektes war es, Parallelroboter für den Einsatz in den Bereichen Handhabung und Montage nutzbar zu machen und von ihren strukturellen Eigenschaften bzgl. hochdynamischer Bewegungen zu profitieren. Die präzise Regelung auch unter Anwesenheit von Reibung, sowie die mögliche Integration adaptronischer Komponenten zur Ausschöpfung des vollen Potentials ist daher von besonderer Bedeutung.

Ziel dieser Arbeit ist daher die Möglichkeit zu schaffen, die im vorhinein unbekannte Reibung ohne weitere Sensorik zu bestimmen und für die Regelung nutzbar zu machen. Dabei ergeben sich die Teilaspekte:

- Detektion der Reibung und Rückführung in die Steuerung unter dem Aspekt der Verbesserung der Güte der Starrkörperregelung. Dabei soll insbesondere auch solche Reibung berücksichtigt werden, die nicht als (quasi-)stationär angenommen werden kann. Diese tritt unter anderem beim Einsatz adaptronischer Gelenke auf.
- Nutzung der bestimmten Informationen der Reibung zur Ansteuerung der adaptronischen Komponenten selbst. Dazu müssen die detektierten Größen dem Regelkreis der Adaptonik zur Verfügung gestellt werden.

In beiden Fällen ergibt sich ein zusätzlicher Signalpfad, der neben der Regelung eine zusätzliche Rückkopplung bedeutet. Neben der eigentlichen Detektion der Reibgrößen muss daher auch die Stabilität des neuen Gesamtsystems sichergestellt und bewiesen werden. Aus diesem Grund wird zur Schätzung der Reibung eine nichtlineare Beobachterstruktur herangezogen.

## 1.4 Stand der Technik

Der Einsatz von Beobachtern zur Bestimmung von nicht messbaren Größen ist ein verbreitetes Konzept. Ausgehend von linearen Systemen ist die Schätzung der Zustandsgrößen durch ein parallel gerechnetes Modell, welches durch die Messgrößen abgeglichen wird, seit langem Bestandteil der modernen Regelungstechnik [8, 9]. Die Analyse ob für die interessierenden Größen ein Entwurf existiert und die Synthese des Beobachters ist in der linearen Regelungstechnik weitestgehend erforscht [10, 11, 12]. Im Bereich der nichtlinearen Systeme existiert keine einheitliche Theorie zum Entwurf von Beobachtern. Eine Zusammenstellung verschiedener Konzepte findet sich in [13]. Den meisten Ansätzen ist, analog zum linearen Fall, gemein, dass ein präzises Modell der zu beobachtenden Strecke erforderlich ist. Dies ist bei den vorliegenden mechatronischen Systemen weitestgehend gegeben. Das mathematische Modell des als Starrkörper angenommenen Roboters beschreibt die Dynamik des Systems i. Allg. sehr genau, siehe z. B. [14].

Aus diesem Grund qualifizieren sich die sogenannten transformationsbasierten Ansätze für diese Systeme. Diese sind über die Beschreibung nichtlinearer Systeme mit Hilfe der Methoden der Differentialgeometrie motiviert [15, 16]. Sie bieten den Vorteil auf lineare Fehlerdynamik abzielen und damit eine exponentielle Konvergenz der geschätzten Größen zu ermöglichen.

Für den Einsatz von Beobachtern in der Robotik existieren zahlreiche Beispiele. Ziel der Schätzung ist in vielen Fällen die Geschwindigkeit der Antriebe, um aufbauend auf dieser Zusatzinformation eine Regelung entwerfen zu können. So ist in [17] ein Beobachter für die Geschwindigkeiten vorgestellt, dessen Schätzwerte in der Regelung verwendet werden. Die Implementierung erfolgte für einen Parallelroboter mit sechs Freiheitsgraden. In [18] ist



ebenfalls ein Beobachterentwurf für mechatronische Systeme gegeben, der die Eigenschaften der dynamischen Gleichungen des Lagrange-Formalismus ausnutzt. Ziel ist es erneut die Geschwindigkeit des Systems präzise zu schätzen. Die lineare Fehlerdynamik wird dabei der Aufweitung der Klasse zulässiger Systeme geopfert. Dies bedeutet auch, dass der Konvergenzradius des Beobachters einer gesonderten Untersuchung bedarf, um das Einzugsgebiet zu bestimmen. Die Schätzung der Roboterzustände kann auch durch die Übertragung des Luenberger Beobachters in die nichtlinearen Gleichungen erfolgen [19]. Dazu wird in dem Paper der lineare Teil separiert und für diesen ein linearer Beobachter entworfen. Das nichtlineare Teilsystem wird als Störung bzw. Unsicherheit aufgefasst, die in der gewählten Beobachterdynamik aufzufangen ist. Der zitierte Artikel benutzt dazu abschnittsweise definierte Funktionen, um die Stabilität zu erreichen. Die Ausführungen sind daher den Entwürfen mit hoher Verstärkung (High-Gain) verwandt.

Neben der Schätzung der Geschwindigkeit, werden Beobachter auch zur Entkopplung bei der Regelung eingesetzt [20, 21]. Dieser Einsatz gründet sich z. B. auf nur ungenau bekannte Modelle des Systems, so dass Ansätze mit modellgestützten Reglern nicht oder nur ansatzweise möglich sind. Der Regelungsansatz ist daher dezentral gewählt. Der Beobachter dient dazu, die durch die Kopplung auftretenden Effekte zu schätzen und zu kompensieren. Auch andere Effekte wie Elastizitäten oder Reibung lassen sich berücksichtigen. Durch die Reduzierung des Systems auf individuelle Achsen, entstehen lineare Teilsysteme für die ein Störgrößenbeobachter entworfen wird.

Ein Einsatz von Beobachtern in Verbindung mit elastischen Gelenken findet sich in [22, 23]. Ziel ist auch hier die Zustandsschätzung des Starrkörpersystems, also Winkel und Winkelgeschwindigkeiten. Mittels zusätzlicher Beschleunigungssensoren am Roboter wird hier eine Entkopplung der einzelnen Achsen angestrebt. Dadurch vereinfacht sich der Entwurf der Beobachter, der auf einen linearen Entwurf zurückgeht. Die eigentlichen Beobachtergleichungen sind linear ausgeführt; die Konvergenz des Entwurfs wird durch die Nutzung hoher Verstärkungen in der Beobachterrückführung sichergestellt.

Ebenfalls mit dem Einsatz von Beobachtern bei der Regelung von Robotern mit elastischen Gelenken befasst sich [24]. Ziel der Schätzung sind hier die elastischen Parameter des Robotermodells. Dazu erfolgt die Aufteilung des Systems in Bereiche mit verschiedenen Zeitskalen, als üblichen Ansatz zur Regelung elastischer Roboter. In diesem Kontext wird analog zum oben dargestellten Ansatz mit linearen Beobachtergleichungen in transformierten Koordinaten gearbeitet. Der Artikel fokussiert die Schätzung der Größen, ohne auf Stabilitätsbetrachtungen einzugehen.

In [25] kommt ein Störgrößenbeobachter bei der Regelung eines Ventils zum Einsatz. Der Beobachter ist im nichtlinearen Kontext entworfen und basiert ebenfalls auf Zustandstransformationen. Die Schätzung diente zur Erfassung nicht messbarer Größen, deren Kenntnis

zur Steigerung der Regelqualität beitragen. Im Gegensatz zu Parallelrobotern besitzt das System nur einen mechanischen Freiheitsgrad.

Der Artikel [26] befasst sich mit der Kollisionserkennung von Robotern mit der Umgebung durch die Detektion von plötzlich auftretenden Störmomenten in den Antrieben eines seriellen Roboters. Hierzu wird ebenfalls eine Beobachterstruktur entworfen, die durch die Wahl des generalisierten Momentes als Zustandsgröße möglich ist. Dadurch entsteht ein nichtlinearer Beobachter mit linearer Fehlerdynamik, der die Schätzung dieses Störmomentes erlaubt. Darauf aufbauend erfolgt die Umschaltung der Steuerung des Roboters im Falle von Kollisionen. Der so entworfene Beobachter ist ebenfalls als Störgrößenbeobachter ausgelegt.

## 1.5 Inhalt der Arbeit

Die Arbeit gliedert sich wie folgt:

Der Aufbau der Steuerung der eingesetzten Parallelroboter ist in Kapitel 2 abgehandelt. Hier wird kurz der Signalfuss der Steuerung erläutert sowie das zu Grunde liegende Regelkonzept. Auf Basis dieser Vorgaben lassen sich die Bedingungen ableiten, wie die Detektion der Reibgrößen in dem vorhandenen Steuerungskontext zu integrieren ist.

Die Bestimmung von nicht messbaren Größen erfordert stets ein Modell, welches die Auswirkungen auf das Gesamtsystem beschreibt. Daher wird in Kapitel 3 der Aufbau der adaptiven Gelenke beschrieben, die als Quelle der Reibkräfte in der Struktur wirken. Zusätzlich wird hier das den weiteren Berechnungen zu Grunde gelegte Reibmodell der Gelenke vorgestellt. Mit Hilfe dieses Modells können dann die weiteren Untersuchungen im Folgekapitel durchgeführt werden.

Nach Integration des Reibmodells in die beschreibende Differentialgleichung des Gesamtsystems erfolgt die Auslegung der Reibdetektion in Kapitel 4. Nach Analyse der Beobachtbarkeitsbedingungen, erfolgt die Ableitung der Beobachterkonzepte mit Hilfe von ZustandsTransformation. Die Eignung der Konzepte wird untersucht und eine allgemeine Vorschrift für die klassifizierten Systeme angegeben.

Die Einbeziehung der bestimmten Reibgrößen in den Kontext der Regelung wird in Kapitel 5 beschrieben. Besonderer Schwerpunkt liegt dabei auf der Garantie der Stabilität des Gesamtsystems bei allen Konzepten. Die Eignung der geschätzten Größen zur Verbesserung der Starrkörperregelung und ihr Einsatz zur Regelung der adaptiven Komponenten wird untersucht.

Die Ergebnisse des Konzepts werden in Kapitel 6 präsentiert. Hier werden simulative und experimentelle Ergebnisse des nichtlinearen Beobachters im Einsatz an einem Versuchsträger des Sonderforschungsbereiches untersucht.

Eine Zusammenfassung schließt die Arbeit ab.

## 2 Steuerungsarchitektur im Sonderforschungsbereich

Die in diesem Kapitel vorgestellte Steuerungsarchitektur stellt die im Sonderforschungsbereich eingesetzte Konfiguration dar. Ihre Kenntnis ist für die Integration des zusätzlichen Beobachtermoduls notwendig. Die Steuerung der Roboter im Sonderforschungsbereich umfasst die komplette Folge von Prozessen beginnend bei der Verarbeitung der Programmieraufgabe in Form von Aktionsprimitiven bis zur Generierung der Stellgrößen der Antriebe des Roboters. Die einzelnen Aufgaben wie Trajektoriengenerierung oder Sicherheitsfunktionalitäten sind modularisiert und werden vom zentralen Steuerungskern verwaltet, siehe [27].

Diese Modularisierung erlaubt den Entwurf des Beobachters als eigenständiges Modul. Durch die mittels des Steuerungskerns zur Verfügung gestellte Infrastruktur, ist der Zugriff auf alle notwendigen Zustandsinformationen bzgl. des Roboters sichergestellt. Weiterhin erlaubt diese Struktur auch die problemlose Verteilung der im Beobachter erzeugten Informationen an die anderen Module der Steuerung, so dass die eingangs formulierten Ziele, Nutzung des Beobachters in der Starrkörperregelung und Verwendung der Informationen zur Steuerung der adaptiven Gelenke unabhängig voneinander durchführbar sind.

In Abbildung 2.1 ist der grundsätzliche Signalfluss der Steuerung skizziert. Das Konzept der Steuerung basiert auf den in [28] vorgestellten Strukturen und leitet sich aus der Anforderung ab, hybride Roboteraufgaben in beliebigen Koordinatensystemen mittels elementarer Anweisungen zu definieren. Die Definition der Aufgabe erfolgt in diesem Konzept in Anwenderkoordinaten, dem *Task-Frame*. Die Aufgabe ist dabei in den zur Verfügung stehenden Achsen definiert. Die Art der Regelung für jede Achse ist dabei individuell vorgebbar, so dass hybride Aufgaben möglich sind. Nach der Überprüfung der Erfüllbarkeit der Aufgabe erfolgt die Zuordnung der Achsen auf die einzelnen Bewegungsmodule der Steuerung. Diese planen die Roboterbewegung in Anwenderkoordinaten, die dann zur Ausführung als Sollwerte an den unterlagerten Regler des Roboters in Weltkoordinaten weitergegeben werden. Die dazu notwendigen Schritte zur Auswahl und Transformation bei hybriden Aufgaben sind in [27, 29] angegeben.

Ein wesentlicher Punkt bei der Bewegungsplanung in dieser Steuerungsarchitektur ist der zunächst nicht vorhandene Rückfluss der Roboterzustände in die Bewegungsmodule. Die

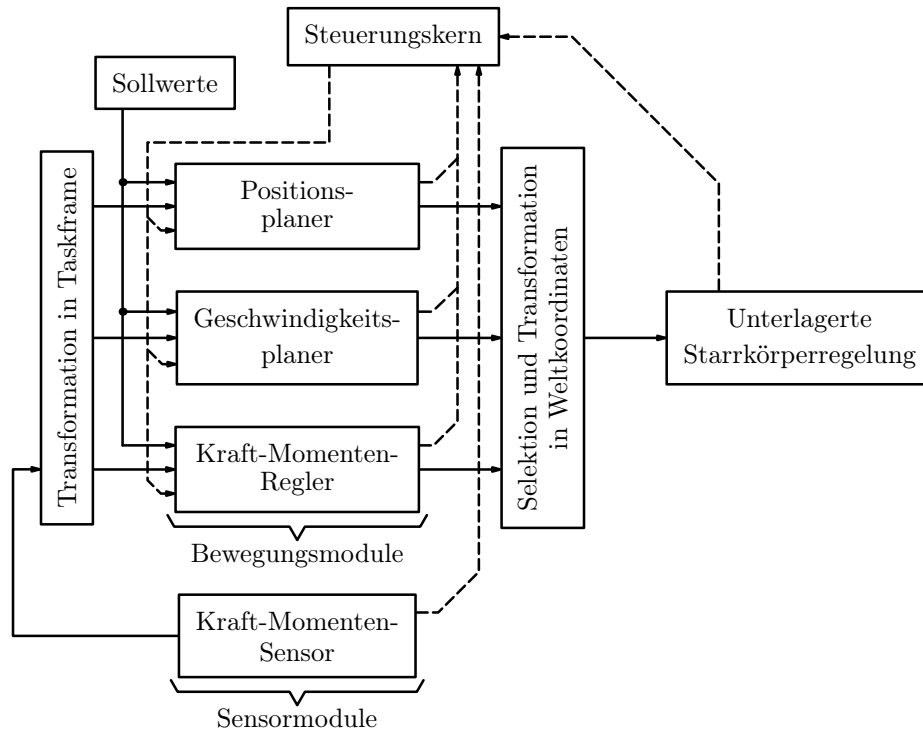


Abbildung 2.1: Architektur der Robotersteuerung RCA 562

Istwerte von Position und Geschwindigkeit stehen den Trajektorienplanern nicht zur Verfügung, siehe Abbildung 2.1. Die aktuellen Zustände werden in Antriebskoordinaten erfasst und müssen daher in die Koordinaten der Aufgaben transformiert werden. Da parallele Kinematiken jedoch ein komplexes direktes kinematisches Problem besitzen, dessen Lösung im Echtzeitkontext nur in Ausnahmefällen gelingt, ist die Transformation der Istwerte in den Task-Frame nicht möglich. Die Bewegungsmodule sind daher als Trajektorienplaner zu verstehen. Da auf ihren Daten auch die Linearisierung des Systems erfolgt, ist die präzise und schnelle Regelung des Systems von großer Bedeutung, um das Auftreten großer Schleppfehler und Bahnverzerrungen zu vermeiden. Die Steuerung sieht dennoch Signalfade von Sensoren zu den Bewegungsmodulen vor. Diese sind durch sogenannte *Sensormodule* realisiert, die es erlauben aktuelle Daten den Bewegungsmodulen zur Verfügung zu stellen. In Abbildung 2.1 ist dies für die Kraftregelung realisiert, die die Kraftregelung im Task-Frame realisiert, und daher Zugriff auf die gemessenen Werte benötigt. Dieser Mechanismus lässt sich auch für den Rückfluss weiterer Zustandsinformationen verwenden. Das Ende einer geplanten Bewegung signalisieren die Module der Steuerung, ein vorzeitiges Beenden der ursprünglichen Bewegung ist durch das Auslösen vorgegebener Abbruchbedingungen möglich.

Die in Abbildung 2.1 dargestellte Kommunikation zwischen den Modulen erfolgt über die Middleware *MiRPA-X*, siehe [30]. Die Daten werden dabei über Nachrichtenkanäle und shared-memory Regionen ausgetauscht. Letztere sind durch geeignete Synchronisationsme-

chanismen vor Zugriffskonflikten zu schützen.

## Unterlagerte Regelung

Der in Abbildung 2.1 als *unterlagerte Starrkörperregelung* bezeichnete Block fasst die Regelung des Roboters zusammen. Dabei ist in diesem Zusammenhang die Regelung des Roboters als starres Mehrkörpersystem bezeichnet. Die Bedämpfung von Strukturschwingungen ist in anderen Modulen berücksichtigt und von der Regelung der Bewegung entkoppelt [31]. Die Verwendung von Direktantrieben bei den Versuchsträgern begünstigt diese Aufteilung. Der Verzicht auf Getriebe befreit das System von den Rückschlageffekten und den Elastizitäten die durch diese eingebracht würden. Ferner erlauben Direktantriebe eine bessere Ausnutzung der dynamischen Eigenschaften des Systems.

Die implementierte Regelung hat die Aufgabe die Dynamik des mechanischen Systems zu kapseln und eine nach außen einheitliche Schnittstelle bereitzustellen. Sie bildet zusammen mit dem mechanischen System eine stabile und pose-unabhängige Dynamik. Dies erlaubt die Generation einheitlicher Trajektorien in kartesischen Anwenderkoordinaten, und sichert so die Wiederverwendbarkeit der Bewegungsmodule der Steuerung. Auf Grund der nicht vorhandenen Rückführung aktueller Zustandsgrößen, siehe voriger Abschnitt, sind diese nicht in der Lage posenabhängige Dynamiken zu berücksichtigen.

Um den dynamischen Anforderungen der Aufgaben im Bereich Handhabung und Montage gerecht zu werden, ist das Starrkörpermodell des Roboters in die Regelung integriert. Das so linearisierte System erfährt anschließend die Regelung mittels linearer Reglerkaskaden, die etwaige Modellfehler und nicht modellierte Störungen ausgleichen. Dabei zeigt sich [32, 29], dass die Linearisierung mittels Vorsteuerung gegenüber der Ein-/Ausgangslinearisierung Vorteile besitzt. Diese benötigt die Spezifikation der Trajektorie bis zur zweiten Zeitableitung. Da die Trajektorien zum Schutz der Struktur ohnehin ruckbegrenzt geplant und somit  $C^2$ -stetig sind, bedeutet dies keine Einschränkung. Die Varianten zum Entwurf der Regler im linearen Kontext sind in [33] ausführlich erläutert. Auf Grund der präzisen mechanischen Modelle und der damit verbundenen Vorsteuerung agieren die Regler vornehmlich zur Unterdrückung von Störungen und sind diesbezüglich optimiert. Zusätzlich sind in der unterlagerten Starrkörperregelung hardwarenahe Regelaufgaben realisiert. Der Konfigurationswechsel am Versuchsträger TRIGLIDE erfordert z. B. alternative Regelungsschemata. Diese können durch die in Abbildung 2.1 verzeichneten Kommunikationskanäle von der Steuerung aktiviert werden.



## 3 Reibung in passiven Gelenken

Im Gegensatz zu den klassischen seriellen Robotern, besitzen Parallelroboter strukturbedingt mehr Gelenke als Freiheitsgrade, siehe Abbildung 1.1. Neben denen zum Antrieb notwendigen aktiven Gelenken, sind die übrigen Gelenke bei bisherigen Parallelrobotern meist rein passiv ausgeführt. Sie enthalten weder Aktorik noch Sensorik. Das Ersetzen eines passiven Gelenks durch ein aktives, führt zu einem Roboter mit mehr Antrieben als Freiheitsgraden. Bei einer parallelen Kinematik resultiert dies in einem überbestimmten System.

Obwohl diese Antriebsredundanz bezüglich einiger Aufgaben, wie z.B. dem Durchfahren von Singularitäten, Vorteile mit sich bringt, bedeutet dies auch, dass der den meisten Parallelkinematiken inhärente Vorteil der gestellfesten Antriebe und damit geringen bewegten Massen aufgegeben wird. Insbesondere beim Einsatz mit hochdynamischen Fahraufträgen, spielt das Eigengewicht der Roboterstruktur eine entscheidende Rolle. Ein vollwertiger zusätzlicher Antrieb in der Struktur ist daher in den meisten Fällen nicht sinnvoll.

Das Ergebnis vieler Aufgaben kann jedoch auch mit nicht vollwertig aktuierten Gelenken verbessert oder überhaupt ermöglicht werden. Dazu wurden im Rahmen des Sonderforschungsbereiches sogenannte adaptronische Gelenke entwickelt, die ein veränderbares Gelenkspiel und damit auch eine veränderbare Reibung bis hin zur vollständigen Blockade des Gelenks besitzen. Diese zusätzliche Aktorik bringt weniger Masse in die Struktur ein und bietet gleichzeitig einige der Vorteile eines weiteren Antriebs. Neben der vereinfachten Fahrt durch Singularitäten kann die Sperrbarkeit der Gelenke auch zur Rekonfiguration der Struktur eingesetzt werden.

Von der vollständigen Blockade des adaptronische Gelenks abgesehen, erlaubt es ebenfalls die selektive Erhöhung der Reibung bzw. die Verringerung des Gelenkspiels. Als mögliche Anwendungsfälle sind der Wechsel vom reibungsarmen Verfahren einer Trajektorie zur gesteigerten Präzision am Endpunkt einer Bahn durch verringertes Gelenkspiel, oder die Dämpfung von Strukturschwingungen zu nennen. Nachteilig ist jedoch, dass sich die durch die Gelenke eingebrachte Reibung schwer messen lässt und diese einen nicht unerheblichen Effekt auf die Regelgüte besitzt. Im Folgenden soll daher zunächst der Aufbau der Gelenke kurz beschrieben werden. Anschließend wird die Reibung modelliert, dabei werden einfache Reibmodelle zugrunde gelegt, die im zweiten Teil des Kapitels motiviert werden.

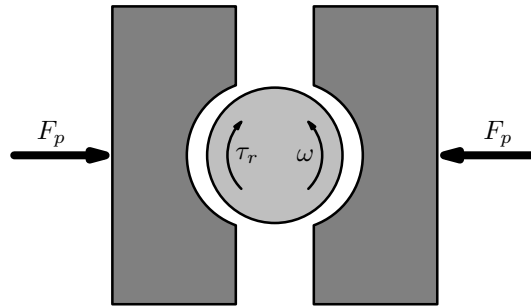


Abbildung 3.1: Prinzipielle Wirkungsweise eines adaptiven Gelenks. Die durch die Piezoaktoren erzeugten Kräfte  $F_p$  bewirken eine Verringerung des Gelenkspiels und erzeugen so ein Reibmoment  $\tau_r$  im Gelenk.

### 3.1 Funktionsweise der adaptiven Gelenke

Der detaillierte Aufbau der Gelenke ist z. B. in [34] beschrieben. Ziel der Entwicklung war es das Gelenkspiel systematisch zu verändern um Reibung im Gelenk zu erhöhen und damit eine größere Dämpfung gewisser Strukturmoden des Roboters zu realisieren [35].

Als Aktorik im Gelenk kommen Piezoaktoren zu Einsatz. Diese Form von Aktoren hat bereits als zusätzliche Aktorik in den Robotergliedern, sogenannte „smart structures“, Einzug erhalten. Das Wirkprinzip der Aktorik im Gelenk ist in Abbildung 3.1 skizziert. Die Piezoaktoren erzeugen eine Kraft  $F_p$ , die die Pressung im Gelenk erhöht und damit, durch die gestiegene Normalkraft, eine erhöhte Reibung zwischen Achse und Lagerschalen erzeugt. Damit steigt das resultierende Reibmoment  $\tau_r$  im Gelenk an.

Die Piezoaktoren eignen sich für dieses Einsatzgebiet aus dem Grund, dass zwar hohe Kräfte im Gelenk benötigt werden, der notwendige Stellweg jedoch eher gering ausfällt. Dies sind Eigenschaften, die Piezoaktoren auszeichnen. Je größer die erzeugte Kraft  $F_p$  ausfällt, desto größer ist auch das Intervall des einstellbaren Reibmomentes. Da für einige der zuvor erwähnten Einsatzzwecke die vollständige Blockade des Gelenks erforderlich ist, sind hier entsprechende große Kräfte vorzusehen. Die Anforderungen an die Grenzfrequenz fallen für das beabsichtigte Einsatzgebiet eher moderat aus, da die Dämpfung der Schwingungen nicht, wie z. B. in [7] durch destruktive Interferenz, sondern durch das Einbringen einer zusätzlichen Dämpfung in das System erfolgt. Das Funktionsprinzip der mit Piezoaktoren ausgestatteten halbaktiven Gelenke ist von dem Lagertyp, Roll- oder Gleitlager, unabhängig einsetzbar.

### 3.2 Angenommenes Reibmodell

Zur Einbeziehung der adaptiven Gelenke in die Regelung des gesamten Roboters ist eine Modellierung ihrer Eigenschaften zwingend erforderlich. Der hauptsächliche Parameter, auf den durch die Adaptronik Einfluss genommen wird, ist das Gelenkspiel, also die Größe



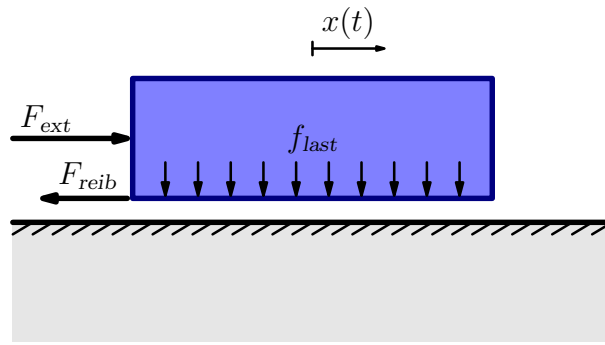


Abbildung 3.2: Bezeichnung der Größen im eindimensionalen Reibmodell

des Luftspalts zwischen Welle und Lager. Als regelungstechnisch relevante Größe erwächst daraus eine veränderliche Reibkraft, die die Bewegung des Roboters insgesamt beeinflusst.

Als Reibung wird hier wie in [36] die Tangentialkraft zwischen zwei Oberflächen im Kontakt angesehen. Physikalisch hängt diese dabei von zahlreichen Einflussfaktoren ab, unter anderem von der Beschaffenheit der Oberflächen, der Relativgeschwindigkeit zwischen beiden Oberflächen und dem Anpressdruck. Die Modellierung dieses nichtlinearen Phänomens ist Gegenstand vieler Untersuchungen [37, 38, 39] um physikalisch motivierte Modelle zu finden. Diese Modelle decken dabei mit unterschiedlichem Detaillierungsgrad Aspekte der Reibung ab. Insbesondere die Beschreibung bei kleinen Relativgeschwindigkeiten einschließlich der Geschwindigkeit Null ist dabei problematisch.

Daraus leitet sich eine grobe Unterteilung der Reibung in Gleit- und Haftreibung ab. Im folgenden wird dabei die Gleitreibung im Vordergrund stehen. Diese ist insbesondere für den späteren Einsatz der Modelle in den Regel- und Schätzalgorithmen wichtig, da diese dann zur Kompensation genutzt werden kann.

Ein weiterer wichtiger Aspekt im folgenden ist die Reduzierung des Problems auf den eindimensionalen Fall, siehe Abbildung 3.2. Die Gelenke sind mit einem Freiheitsgrad pro Achse konzipiert, sodass die Relativgeschwindigkeit zwischen den Oberflächen ebenfalls durch einen eindimensionalen Vektor  $\mathbf{v}_{reib} \in \mathbb{R}^1$  beschrieben werden kann. Damit ist auch die Wirkungsrichtung der Reibkraft eindeutig definiert: Sie wirkt der Geschwindigkeit entgegen. Anders als bei mehrdimensionalen Kontakten sind Geschwindigkeit und Reibkraft zwingend antiparallel.

Abhängig von der Art der mathematischen Modellbeschreibung, unterteilt die Literatur, siehe [36, 40], die Reibmodelle in statische und dynamische Ansätze. Unter statischen Ansätzen sind diejenigen zu verstehen, deren Reibvorhersagen sich lediglich auf den momentanen Wert der Zustände stützen. Da die Modellgleichungen algebraisch sind, lassen sich die einzelnen Bestandteile, wie Coulombsche Reibung und viskose Reibung, gut separieren. In Abbildung 3.3 ist eine Auswahl statischer Modelle bzw. ihre Kombination dargestellt.

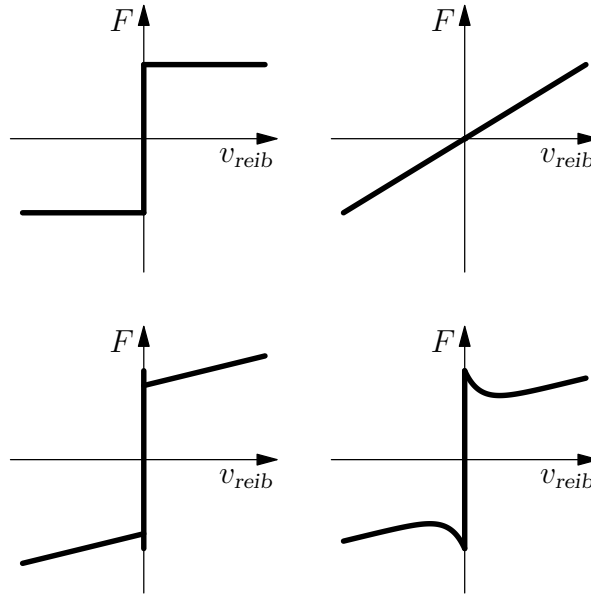


Abbildung 3.3: Einige statische Reibmodelle. *Oben*: Coulombsche und viskose Reibung (linearer Verlauf), *unten*: Kombination aus beiden mit Haftreibung und Stribeck-Effekt. Zu beachten ist, dass die Reibkraft um die Geschwindigkeit  $v_{reib} = 0$  nicht definiert ist, sondern nur sicher in einem Intervall liegt.

Die Kernidee, dass die Reibkraft der Bewegung entgegen wirkt, führt zur Berücksichtigung der Geschwindigkeit in den Modellen. Die Coulombsche Reibung setzt eine konstante, vom Betrag der Geschwindigkeit unabhängige Reibung an

$$F_{reib} = F_c \cdot \operatorname{sgn}(v_{reib,n}) \quad \text{für } v_{reib} \neq 0. \quad (3.1)$$

Hingegen ist die viskose Reibung von dem Betrag der Geschwindigkeit abhängig und in ihrer allgemeinen Form nichtlinear

$$F_{reib} = F_v |v_{reib,n}|^r \operatorname{sgn}(v_{reib,n}). \quad (3.2)$$

Die weiteren in Abbildung 3.3 aufgeführten Modelle sind Erweiterungen für geringe Geschwindigkeiten bzw. auch Geschwindigkeit Null. So modelliert der Stribeckeffekt das Verhalten kleiner Geschwindigkeiten, bei dem der eigentlichen Reibung ein negativer Term überlagert wird. Diese Modifikation bildet den Übergang vom Haften zum Gleiten ab, bei dem sich ein Absenken der Reibung beobachten lässt. Die in Abbildung 3.3 gezeigte viskose Reibung ist für den Sonderfall  $r = 1$  in Gleichung (3.2) dargestellt.

Dynamische Modelle verwenden Differentialgleichungen um die auftretenden Reibphänomene zu beschreiben. Eine Verallgemeinerung des Coulombschen Modells stellt dabei das dynamische von Dahl [37] vorgestellte Modell dar. Es beschreibt die Reibung durch die Dif-

ferentialgleichung

$$\frac{d F_{reib}}{d t} = \sigma \left( 1 - \frac{F_{reib}}{F_c} \operatorname{sgn}(v_{reib,n}) \right)^r v_{reib}, \quad (3.3)$$

wobei  $\sigma$  der Steifigkeitskoeffizient ist, mit  $[\sigma]_{SI} = \text{N m}^{-1}$ . Die dynamischen Modelle haben an Komplexität zugenommen, wichtige Vertreter sind das auf der Idee der Borsten basierende LuGre-Modell und der neuere Maxwell-Slip Ansatz, die im Gegensatz zum einfacheren Dahl Modell weitere Eigenschaften im Reibkontakt abbilden, wie Losbrechkräfte und den Stribeckeffekt.

### 3.2.1 Geschwindigkeitsunabhängige Reibung

Bei der Coulombschen Reibung ist der Wert der Reibkraft vom gegenwärtigen Geschwindigkeitsbetrag unabhängig. In den statischen Modellen findet sich dies in der geschwindigkeitsunabhängigen Reibung, siehe Gleichung (3.1), wieder. Die Geschwindigkeit bestimmt lediglich die Wirkrichtung der Reibkraft. Ihr Betrag ist dabei proportional zur Normalkraft

$$F_c = \mu_0 F_N. \quad (3.4)$$

Ein wichtiger Punkt ist die Beschreibung der Coulombschen Reibung an der Stelle  $v_{reib} = 0$ . An dieser Stelle ist, anders als die Signumfunktion in Gleichung (3.1) suggeriert, die Reibkraft nicht exakt definiert. Daher ist eine Fallunterscheidung notwendig, um diesen Konflikt zu lösen

$$F_{reib} = \begin{cases} F_{ext}, & v_{reib} = 0 \wedge F_{ext} < F_c \\ F_c \cdot \operatorname{sgn}(v_{reib,n}), & v_{reib} \neq 0 \end{cases}, \quad (3.5)$$

wobei  $F_{ext}$  die extern wirkende Kraft ist. Das Modell ist auf Grund der Signumfunktion nichtlinear. Im Allgemeinen wird die Coulombsche Reibung bzgl. der Geschwindigkeit nicht punktsymmetrisch sein. Je nach Vorzeichen der relativen Geschwindigkeit sind die Reibkräfte unter Umständen verschieden

$$F_{reib} = \begin{cases} F_{ext}, & v_{reib} = 0 \wedge -F_c^- < F_{ext} < F_c^+ \\ F_c^+, & v_{reib} > 0 \\ -F_c^-, & v_{reib} < 0 \end{cases}. \quad (3.6)$$

Das Modell von Dahl verallgemeinert die so beschriebene Coulombsche Reibung. Es berücksichtigt die Dynamik der Reibkräfte und integriert daher die Entwicklung der Zustände

des Systems in die Beschreibung. Wird der Exponent  $r$  in Gleichung (3.3) zu Eins gesetzt, folgt daraus die Differentialgleichung

$$\frac{d F_{reib}}{d t} = \sigma \left( 1 - \frac{F_{reib}}{F_c} \operatorname{sgn}(v_{reib,n}) \right) v_{reib}. \quad (3.7)$$

Die Lösung der Differentialgleichung (3.7) besitzt den stationären Zustand

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (F_{reib}(t)) = F_c \operatorname{sgn}(v_{reib,n}), \quad (3.8)$$

der der Coulombschen Reibung entspricht. Das Modell stellt daher im Bereich von  $v_{reib} = 0$  eine Erweiterung dar. Es ergänzt das Coulombsche Modell um einige Aspekte im Preslidingbereich. Um diesen Aspekt zu verdeutlichen, ist es sinnvoll die Differentialgleichung auf die Ortskoordinate zu beziehen, so dass die Reibkraft unabhängig von der Zeit formuliert wird.

### 3.2.2 Geschwindigkeitsabhängige Reibung

Neben der Modellierung der Reibung über geschwindigkeitsunabhängige Modelle, existieren Modelle, die den Betrag der Geschwindigkeit mit einbeziehen. Anders als bei der geschwindigkeitsunabhängigen Reibung wird hier in verschiedene Bereiche unterteilt, die ebenfalls vom Betrag der Geschwindigkeit abhängen. Dabei wird ein Übergang vom Haften bis zum vollständigen Gleiten vollzogen. Die physikalische Erklärung der unterschiedlichen Bereiche ist in [40] mit den Zuständen der Grenzschicht zwischen den Materialien erklärt. Im folgenden Kapitel wird vor allem wichtig sein, dass sich die Reibmodelle dieser Bereiche Geschwindigkeiten zuordnen lassen.

In der Phase des vollständigen Gleitens liegt ein statisches Modell für diese Komponente der Reibkraft mit Gleichung (3.2) vor. Der wichtige Spezialfall der geschwindigkeitsproportionalen Reibung liegt für den Exponenten  $r = 1$  vor. In diesem Fall ergibt sich für diese Komponente ein lineares Reibmodell. In der Übergangsphase vom Haften zum Gleiten kann ein umgekehrter Zusammenhang zwischen Geschwindigkeit und Reibkraft vorliegen, der sog. Stybeck-Effekt. Seine Modellierung erfolgt mittels abklingender Funktionen, siehe Gleichung (3.9), in  $v_{reib}$ , wie

$$F_{reib}(v_{reib}) = F_s e^{-\left| \frac{v_{reib}}{v_s} \right|} \quad \vee \quad F_{reib}(v_{reib}) = F_s \left( 1 + \frac{v_{reib}^2}{v_s^2} \right)^{-1} \quad (3.9)$$

bestimmt. Diese Eigenschaft erlaubt es die Funktionen in das statische Modell der geschwindigkeitsabhängigen Reibung zu integrieren, ohne eine Fallunterscheidung, abhängig vom Betrag der relativen Geschwindigkeit  $\mathbf{v}_{reib}$  der Körper zu machen. Lediglich der Bereich vor der

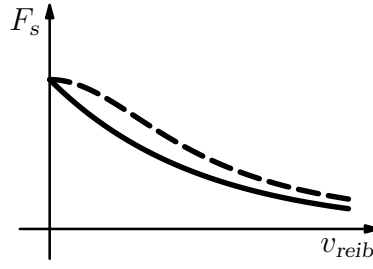


Abbildung 3.4: Verlauf der Modellierung für Strybeckeffekt: Exponentieller (durchgezogen) und gebrochen rationaler (gestrichelt) Ansatz

Haftgrenze ist daher gesondert zu behandeln.

Wie auch bei der geschwindigkeitsunabhängigen Reibung, Gleichung (3.6), ist es sinnvoll bei den Funktionen eine Asymmetrie für positive und negative Geschwindigkeiten vorzusehen. Dies schlägt sich in den Koeffizienten wie folgt nieder

$$F_{reib} = \begin{cases} m_v^+ v_{reib} + F_s^+ g(v_{reib}, v_s^+), & v_{reib} > 0 \\ m_v^- v_{reib} - F_s^- g(v_{reib}, v_s^-), & v_{reib} < 0 \end{cases}, \quad (3.10)$$

wobei  $g$  die entsprechende Funktion für den Strybeck-Effekt beschreibt.

### 3.2.3 Gesamtes Modell

Aus den vorigen Überlegungen lässt sich ein gesamtes Reibmodell erzeugen. Da die gewählten Modelle, mit Ausnahme des von Dahl, Gleichung (3.7), statische Beschreibungen sind, lassen sie sich zu einem Gesamtmodell überlagern

$$F_{reib} = \begin{cases} F_{ext}, & v_{reib} = 0 \quad \wedge \\ & -(F_c^- + F_s^-) < F_{ext} < F_c^+ + F_s^+ \\ m_v^+ v_{reib} + F_s^+ g(v_{reib}, v_s^+) + F_c^+, & v_{reib} > 0 \\ m_v^- v_{reib} - F_s^- g(v_{reib}, v_s^-) - F_c^-, & v_{reib} < 0 \end{cases}. \quad (3.11)$$

Die Verwendung statischer Modelle in der Beschreibung der Reibkraft nach Gleichung (3.11) verzichtet insbesondere auf Phänomene vor dem Überschreiten der Haftgrenze. Um diese präzise zu modellieren sind dynamische Modelle notwendig. Die Ausklammerung dieser Aspekte wird in Kapitel 4 motiviert. Im Vorgriff auf das folgende Kapitel sei auf die Beschreibung der Reibkraft im Stillstand hingewiesen. In diesem Fall ist die Kraft mittels eines Intervalls beschrieben, so dass die Integration als Zustandsgröße in den dynamischen Gleichungen des Gesamtsystems nicht durchführbar ist. Neben weiteren Aspekten ist dies ein Grund den Bereich um  $v_{reib} = 0$  von der Schätzung auszunehmen. Vor diesem Hintergrund wird von

weiteren Verfeinerungen des Modells abgesehen.

Die explizite Unterscheidung der charakteristischen Parameter des Modells abhängig von der Orientierung der Geschwindigkeit in Gleichung (3.11), erlaubt die Berücksichtigung der Bewegungsrichtung bei der Angabe der Reibkraft. Eine Positionsabhängigkeit der Parameter ist jedoch nicht vorgesehen, somit ist ein homogener Kontakt angenommen. Eine Totzeit zwischen Reibkraft und Geschwindigkeit taucht im Modell ebenfalls nicht auf.

Hervorzuheben ist die Abhängigkeit von der Normalkraft als zusätzliche Einflussgröße. Sie beeinflusst insbesondere die Parameter  $F_c^\pm$  und  $m_v^\pm$  des Modells. Mit Veränderung des Gelenkspiels und damit der Anpresskraft wird somit die resultierende Reibkraft beeinflusst, gemäß Gleichung (3.4).

## 4 Detektion der Reibkraft

Die im vorigen Kapitel skizzierten adaptronischen Gelenke besitzen eine variable Reibkraft, die die Dynamik des gesamten Systems beeinflussen. Weiterhin offenbaren diese Gelenke aber auch Möglichkeiten, die Qualität der Roboteranfrage zu erhöhen. Zum einen ist dabei der Einsatz zur Unterdrückung von Schwingungen zu sehen [41]. Ein weiterer Aspekt ist die Anpassung des Gelenkspiels an die jeweilige Roboteranfrage. Aus regelungstechnischer Sicht sind dabei zwei Punkte relevant

1. Die Verringerung des Gelenkspiels wird auch die Reibung in den Gelenken signifikant erhöhen. Da für spezielle Aufgaben sogar die vollständige Blockade des Gelenks angestrebt wird, ist die damit verbundene Veränderung der Dynamik des Roboters offensichtlich. Soll die Güte der Regelung sich daher nicht verschlechtern, muss der neuen Dynamik Rechnung getragen werden.
2. Ist eine definierte Verstellung des Gelenkspiels für bestimmte Aufgaben angestrebt, so muss diese Größe erfasst werden. Bereits in der Konzeptionsphase hat sich gezeigt, dass diese schwer messbar ist. Der Versuchsstand für die Gelenke greift daher auf die Messung der Reibung als Ersatzgröße für das Gelenkspiel zurück. Daher ist die Kenntnis der gegenwärtigen Reibung ein Signal, welches für diese Regelaufgabe verwendbar ist.

Beide Szenarien erfordern die Bestimmung der Zustände des adaptronischen Gelenks. Im Falle von Punkt 1 ist dies die verursachte Reibung direkt, unter Punkt 2 ist die Reibung eine zweckmäßige Ersatzgröße oder abhängig von der gestellten Aufgabe die Regelgröße selbst.

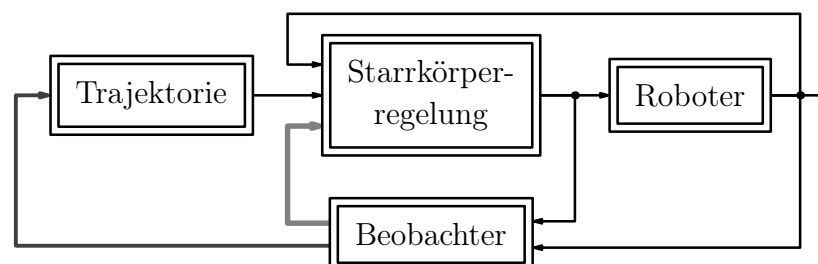


Abbildung 4.1: Einsatz der detektierten Reibkraft in der Regelung

Kann die Reibkraft zuverlässig ermittelt werden, so können die oben genannten Punkte abgearbeitet werden. Mögliche Signalflüsse für das Szenario unter Punkt 1 sind in Abbildung 4.1 illustriert. Die Regelung inklusive Modell und Transformationen sind in dem Block „Starrkörperregelung“ zusammengefasst. Die Informationen des Beobachters können sowohl in der Regelung als auch in der Planung genutzt werden.

## 4.1 Art der Detektion

Aus den definierten Aufgaben leiten sich die Anforderungen an die Detektion der Reibkraft ab. Bei der unter Punkt 2 beschriebenen Aufgabe ist der Momentanwert der Reibkraft relevant. Seine Kenntnis ist für den Regler der Adaptronik wichtig, um den gewünschten Zustand am Gelenk einzustellen. Ein detailliertes Modell der Reibung ist nicht zwingend erforderlich, da keine Vorhersagen zu treffen sind. Anders liegt die Situation im Falle von Punkt 2. Um den Einfluss auf die Dynamik entsprechend zu kompensieren, ist die Wahl des Modells von Bedeutung.

Weiterhin soll die Bestimmung der Reibkraft ohne zusätzliche Sensorik auskommen. Der jeweilige Zustand des adaptronischen Gelenks muss daher aus den vorhandenen Größen im Zusammenspiel mit dem Modell der Strecke abgeleitet werden. Generell bietet sich für derartige Aufgaben die Adaption etwaiger Modellparameter oder eine Zustandsschätzung mittels Beobachter an. In beiden Fällen, Adaption und Beobachtung, muss für das mit Reibung beaufschlagte System ein möglichst präzises mathematisches Modell existieren. Die Komplexität des Modells ist auf der anderen Seite durch den Einsatz im Echtzeitkontext mit entsprechend angestrebten niedrigen Zykluszeiten beschränkt.

Da der Einfluss auf die Reibung nach bewussten Eingriffen erfolgt und daher nicht als quasi-stationär angenommen werden kann, muss das gewählte Verfahren in der Lage sein diesen Änderungen zu folgen. Weiterhin setzt die Forderung nach Punkt 2 zu Beginn dieses Kapitels den Einsatz des Verfahrens im Regelkreis voraus. Diese Gründe sprechen für den Einsatz eines in diesem Falle nichtlinearen Beobachters, um die Werte der Reibung zu bestimmen. Im Gegensatz zur Theorie der Zustandsbeobachter im Rahmen linearer Systeme, die umfassend in der Literatur beschrieben ist [8], fehlt bei nichtlinearen Systemen ein einheitlicher Ansatz. Bei mechanischen Systemen bietet die Differentialgeometrie jedoch ein vielversprechendes Werkzeug, um derartige Probleme zu formulieren und zu lösen.

### 4.1.1 Die Modellierung des Systems

Wie bereits erwähnt, wird für die Zustandsschätzung ein möglichst präzises Modell der Strecke benötigt. Das mechanische Modell des Roboters wird dabei von der Differentialgleichung



abgebildet

$$\mathbf{M}_q(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}_q(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}_q(\mathbf{q}) = \boldsymbol{\tau}_d + {}^\sigma \mathbf{J}_q^T(\mathbf{q}) \boldsymbol{\sigma}_r \quad \text{mit} \quad \mathbf{q} \in \mathbb{R}^{n_{dof}}, \quad (4.1)$$

mit der Trägheitsmatrix  $\mathbf{M}_q$ , der Coriolismatrix  $\mathbf{C}_q$ , dem Gravitationsvektor  $\mathbf{g}_q$  und den Antriebsmomenten  $\boldsymbol{\tau}_d$ . Die von den passiven adaptronischen Gelenken verursachten Reibkräfte bzw. -momente  $\boldsymbol{\sigma}_r$  werden mit der entsprechenden Jakobimatrix  ${}^\sigma \mathbf{J}_q^T$  in den Raum der verallgemeinerten Kräfte transformiert. Die Gleichung ist den verallgemeinerten Koordinaten formuliert, die hier den Antriebskoordinaten entsprechen. Diese, bei Parallelkinematiken eher unübliche Formulierung, bietet den Vorteil die tatsächlichen Messgrößen zu beinhalten. Im Folgenden wird die Koordinatenabhängigkeit der Systemmatrizen aus Gründen der Übersichtlichkeit weggelassen.

Das mathematische Modell des Roboters liegt nach Gleichung (4.1) als Differentialgleichung zweiter Ordnung vor. Die weitere Analyse des Systems mit Hilfe der Methoden der Differentialgeometrie erfordert die Darstellung im Zustandsraum, also als System von Gleichungen erster Ordnung.

Da sich die Gleichung explizit nach der höchsten Ableitung auflösen lässt, erfolgt diese Transformation durch Substitution der Variablen

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \begin{bmatrix} \mathbf{x}_A^T & \mathbf{x}_B^T \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} x_1 & \dots & x_{n_{dof}} & x_{n_{dof}+1} & \dots & x_{2n_{dof}} \end{bmatrix}^T \\ &= \begin{bmatrix} q_1 & \dots & q_{n_{dof}} & \dot{q}_1 & \dots & \dot{q}_{n_{dof}} \end{bmatrix}^T \end{aligned} \quad (4.2)$$

und Umstellen der Gleichung nach der zweiten Ableitung der verallgemeinerten Koordinaten. Die dazu notwendige Inversion der Trägheitsmatrix  $\mathbf{M}_q$  unterliegt keiner Beschränkung, da diese stets regulär ist

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{q}} &= \mathbf{M}_q^{-1} \boldsymbol{\tau}_d + \mathbf{M}_q^{-1} {}^\sigma \mathbf{J}_q^T \boldsymbol{\sigma}_r - \mathbf{M}_q^{-1} (\mathbf{C}_q \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}_q) \\ \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_A \\ \mathbf{x}_B \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbf{x}_B \\ -\mathbf{M}_q^{-1} (\mathbf{C}_q \mathbf{x}_B + \mathbf{g}_q) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{M}_q^{-1} {}^\sigma \mathbf{J}_q^T \boldsymbol{\sigma}_r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{M}_q^{-1} \boldsymbol{\tau}_d \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Das Modell nach Gleichung (4.3) enthält die Reibung noch als externen Parameter, der nicht Bestandteil des Zustandsraums ist. Die Methoden der nichtlinearen Beobachter sehen eine Zustandsschätzung vor, daher ist die Reibung als interne Größe dem Modell hinzuzufügen. Für diese Integration sind die Modelle aus Abschnitt 3.2 notwendig. Mit ihrer Hilfe lassen sich Kenngrößen der Reibung in das Gesamtmodell des Systems integrieren und ein entsprechender Beobachter auslegen. Analog zu linearen Störgrößenbeobachtern identifiziert sich zunächst der eigentliche Vektor der Störgrößen in Gleichung (4.3) zu  $\boldsymbol{\sigma}_r$ . Dieser koppelt

über eine zustandsabhängige Matrix in das System ein, ist jedoch bezüglich seiner Elemente linear. Um die Störgröße in die Zustandsdifferentialgleichungen mit aufzunehmen, werden wie im linearen Fall, siehe [11], Annahmen über ihren Verlauf getroffen. Diese erfolgen mit den Modellen nach Abschnitt 3.2, dabei wird das statische Modell nach Gleichung (3.11) herangezogen, der Stribeck-Effekt wird dabei aus den Gleichungen entfernt. Die Motivation für dieses Vorgehen leitet sich aus den bereits in Kapitel 3 formulierten Überlegungen ab, die Detektion um den Bereich  $v_{reib} = 0$  auszusetzen. Der Stribeck-Effekt dient vor allem der präziseren Modellierung dieses Bereichs, so dass seine Berücksichtigung kaum zur Verbesserung des Modells beiträgt. Da sich die Reibzustände in den Gelenken untereinander nicht beeinflussen, gilt für jedes ein individuelles und von den anderen entkoppeltes Modell. Als Annahme über den Störgrößenverlauf sind dabei die Parameter  $F_c$  und  $m_v$  als konstant bzw. stückweise konstante Funktionen angenommen. Damit vergrößert sich die Dimension des Zustandsraumes um die doppelte Anzahl der berücksichtigten Reibmomente  $n_f$

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \begin{bmatrix} \mathbf{x}_A^T & \mathbf{x}_B^T & \mathbf{x}_C^T & \mathbf{x}_D^T \end{bmatrix}^T \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{q}^T & \dot{\mathbf{q}}^T & \mathbf{F}_c^T & \mathbf{m}_v^T \end{bmatrix}^T \end{aligned} \quad \text{mit} \quad \begin{aligned} \mathbf{x} &\in \mathbb{R}^n, n = 2n_{dof} + 2n_f \\ \mathbf{x}_C, \mathbf{x}_D &\in \mathbb{R}^{n_f} \end{aligned} . \quad (4.4)$$

Mit Hilfe des in Gleichung (4.4) definierten Zustandsvektors und den oben getroffenen Annahmen über das Verhalten der charakteristischen Parameter  $\mathbf{F}_c$  und  $\mathbf{m}_v$  definiert sich die gesamte nichtlineare Zustandsgleichung

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_A \\ \mathbf{x}_B \\ \mathbf{x}_C \\ \mathbf{x}_D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_B \\ \mathbf{M}_q^{-1} (\boldsymbol{\sigma} \mathbf{J}_q^T \mathbf{x}_C + \boldsymbol{\sigma} \mathbf{J}_q^T \text{diag}(\mathbf{x}_D) \mathbf{x}_B - (\mathbf{C}_q \boldsymbol{\sigma} \mathbf{J}_q \mathbf{x}_B + \mathbf{g}_q)) \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{M}_q^{-1} \boldsymbol{\tau}_d \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (4.5)$$

wobei  $\boldsymbol{\sigma} \mathbf{J}_q \mathbf{x}_B$  die generalisierten Geschwindigkeiten in den Raum transformiert, in dem die Reibung definiert ist. Auf Grund der statisch-kinetischen Dualität sind die Jakobimatrizen gleich.

Zur vollständigen Angabe des Zustandsraummodells des Roboters fehlt noch die Definition der Ausgangsabbildung des Systems, also die Transformation der Zustandsgrößen auf die Messgrößen. Durch die Wahl der generalisierten Koordinaten zur Beschreibung der dynamischen Gleichungen, entsprechen die Zustandsgrößen den tatsächlichen Ausgängen des Systems: Den Antriebspositionen und Geschwindigkeiten

$$\mathbf{y} = \mathbf{h}_x(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_A^T & \mathbf{x}_B^T \end{bmatrix}^T \quad \text{mit} \quad \mathbf{y} \in \mathbb{R}^{2n_{dof}}. \quad (4.6)$$

In Gleichung (4.5) ist auf der rechten Seite ein von den Eingangsgrößen unabhängiger Summand abgeteilt. Auf diesen Vektor wird im folgenden als Driftfeld referenziert. Der zweite Term enthält die Eingangsgrößen. Fasst man die zustandsabhängigen Größen zu einer Matrix zusammen, so ergibt sich aus den Gleichungen (4.5) und (4.6) das eingangslineare Zustandsraummodell

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}_{\mathbf{x}} + \sum_{j=1}^{n_{dof}} \mathbf{g}_{\mathbf{x},j} \tau_{d,j} \quad (4.7a)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{h}_{\mathbf{x}}. \quad (4.7b)$$

Damit ist das System für die differentialgeometrischen Untersuchungen vorbereitet. Das Vektorfeld  $\mathbf{f}_{\mathbf{x}}$  und die Komponenten Matrix  $\mathbf{G}_{\mathbf{x}}$  sind analog zum Zustandsvektor in Teilkomponenten  $A, \dots, D$  gegliedert. Über Gleichung (4.7) wird dabei nur ein Teil des gesamten Zustandsraumes  $\mathcal{M}$  des Roboters beschrieben. Die einzelnen Teilräume sind durch Singularitäten getrennt. Da die Gestalt der Gleichungen für jeden der Teilräume gleich ist, stellt dies im folgenden keine Einschränkung dar.

## 4.2 Beobachtbarkeit des Systems

Das Modell aus Gleichung (4.7) ermöglicht nun die Definition der Beobachteraufgabe. Die zu beobachtenden Zustandsgrößen sind der Wert der Coulombschen Reibung in den Gelenken, sowie der Proportionalitätsfaktor der viskosen Reibung, repräsentiert durch  $\mathbf{x}_C$  und  $\mathbf{x}_D$  im Zustandsvektor. Das System ist nun auf Beobachtbarkeit zu prüfen, bevor über die Ableitung des Zustandsschätzers entschieden wird.

Die Beobachtbarkeit von Systemen ist definiert über die Möglichkeit die Zustandsgrößen auf Basis der Systemausgänge zu rekonstruieren. Im Gegensatz zu linearen Systemen kann die Rekonstruierbarkeit bei manchen Eingangssignalen möglich sein, bei anderen nicht. Dies wird bei der Definition der Beobachtbarkeit berücksichtigt.

**Definition 1 (Beobachtbarkeit)** Für ein System heißen zwei Zustände  $\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2$  *nichtunterscheidbar*  $\mathbf{z}_1 \text{ I } \mathbf{z}_2$ , g.d.w. für jede zulässige Eingangsfunktion  $\mathbf{u}(t)$  die jeweiligen Ausgangsbildungen gleich sind  $\mathbf{y}(t, \mathbf{z}_1, \mathbf{u}) = \mathbf{y}(t, \mathbf{z}_2, \mathbf{u}), t \geq 0$ . Das System heißt *beobachtbar*, wenn die Nichtunterscheidbarkeit zweier Zustände ihre Identität impliziert

$$\mathbf{z}_1 \text{ I } \mathbf{z}_2 \Rightarrow \mathbf{z}_1 = \mathbf{z}_2$$

□

Die Formulierung der Beobachtbarkeit nach Definition 1 fordert dabei nicht die Unterscheidbarkeit für alle Eingangssignale. Weiterhin legt Definition 1 den formalen Begriff der Beobachtbarkeit fest, stellt jedoch kein leicht zu prüfendes Kriterium dar. Die Formulierung einer Bedingung analog zum linearen Fall unterliegt bei nichtlinearen Systemen der Einschränkung eine lokale Bedingung zu sein [16]. Die Nichtunterscheidbarkeit zweier Anfangszustände gilt dabei in einer offenen Teilmenge des gesamten Zustandsraums des Roboters  $\mathcal{V} \subset \mathcal{M}$ . Existiert um alle möglichen Anfangszustände eine solche Umgebung, so heißt das System lokal beobachtbar.

Zur Überprüfung der lokalen Beobachtbarkeit bietet die Differentialgeometrie Verfahren an. Diese ermöglichen es, den Test auf Beobachtbarkeit ähnlich im linearen Fall auf Rangbedingungen zu projizieren. Bei nichtlinearen Systemen sind dies keine Matrizen sondern Kodistributionen. Die Bedingungen zur Beobachtbarkeit werden mit Hilfe des Beobachtbarkeitsraums [16] formuliert.

**Definition 2 (Beobachtbarkeitsraum)** Der Beobachtbarkeitsraum eines nichtlinearen Systems nach Gleichung (4.7)) ist als derjenige Vektorraum  $\mathcal{O}$  definiert, der alle Ausgangsabbildungen  $h_{x,1}, \dots, h_{x,p}$  enthält, sowie alle wiederholten Lie-Ableitungen

$$\begin{array}{l} L_{\xi_1} L_{\xi_2} \cdots L_{\xi_k} h_{x,j}(\mathbf{x}) \quad j \in \{1, 2, \dots, p\} \\ \xi_i \in \{\mathbf{f}_x, \mathbf{g}_{x,1}, \dots, \mathbf{g}_{x,q}\} \end{array}.$$

Demnach ist der Raum abgeschlossen bzgl. der Differentiation entlang der Vektorfelder  $\xi_i$ .  $\square$

Die Vorschrift zur Konstruktion des Beobachtbarkeitsraums nach Definition 2 beschränkt die Anzahl der Lie-Ableitungen. Es ist eine minimale Basis zu finden.

**Satz 1 (Starke lokale Beobachtbarkeit)** *Ein analytisches nichtlineares System nach Gleichung (4.7) ist dann lokal beobachtbar in  $\mathbf{x}_0$ , falls die Kodistribution des Vektorraums nach Definition 2 in  $\mathbf{x}_0$  die gleiche Dimension wie das System hat*

$$\dim(\mathcal{M}) = \dim(\Delta\mathcal{O}(\mathbf{x}_i)) = n_f \quad \text{mit} \quad \Delta\mathcal{O}(\mathbf{x}_i) = \text{span}(\mathrm{d}\Phi(\mathbf{x}_i) | \Phi \in \mathcal{O})$$

*Erfüllt das System die Bedingung für alle  $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{M}$ , dann ist das System lokal beobachtbar.*  $\square$

**Bemerkung 1** Der Beobachtbarkeitsraum  $\mathcal{O}$  nach Satz 1 enthält unendlich viele Funktionen. Für die Bewertung der Beobachtbarkeit werden  $n$  linear unabhängige Funktionen benötigt. Mit Hilfe dieser erfolgt dann der Test der im selben Satz formulierten Rangbedingung. Im Allgemeinen sind dies die Ausgangsabbildungen selbst, sowie die ersten Lie-Ableitungen.  $\square$

Neben der Analyse der Beobachtbarkeit mittels der Kodistribution existiert die Möglichkeit die Beobachtbarkeitsabbildung zu untersuchen, siehe [13]. Diese untersucht die Möglichkeit die Zustandsgrößen aus den Ausgangsgrößen des Systems zu rekonstruieren.

**Definition 3 (Beobachtbarkeitsabbildung ([13]))** Die Beobachtbarkeitsabbildung für Systeme nach Gleichung (4.7) mit hinreichend oft differenzierbarer Ausgangsabbildung lautet

$$\mathbf{q} := \begin{bmatrix} \mathbf{h}_x \\ \frac{d}{dt}\mathbf{h}_x \\ \vdots \\ \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}\mathbf{h}_x \end{bmatrix}. \quad (4.8)$$

Damit besteht eine Verwandtschaft zum Beobachtbarkeitsraum, da die Zeitableitungen durch Lie-Ableitungen entlang des Driftfeldes und der Eingangsgrößen formulierbar sind.  $\square$

**Satz 2 (Globale Beobachtbarkeit ([13]))** *Ein nichtlineares System in der Form von Gleichung (4.7) ist dann global beobachtbar, wenn seine Beobachtbarkeitsabbildung nach Definition 3 auf dem gesamten Definitionsbereich für  $\mathbf{x}, \boldsymbol{\tau}_d$  eindeutig invertierbar ist.*  $\square$

Bei der Beobachtbarkeitsbedingung aus Satz 2 ist zu beachten, dass die Abbildung nach Definition 3 die totalen Differentiale der Ausgangsabbildung bzgl. der Zeit enthält und daher auch Ableitungen der Eingangsgröße enthalten kann.

Zur Prüfung der Beobachtbarkeit muss daher der Beobachtbarkeitsraum des Systems nach Gleichung (4.7) aufgestellt werden. Durch die Beschreibung des Systems in Antriebskoordinaten sind die Komponenten der Ausgangsabbildung  $\mathbf{h}_x$  sowie die Vektorfelder  $h_{x,i}$  entsprechend einfach. Der Raum enthält damit die Zustände  $x_1, \dots, x_{2n_{dof}}$ . Die Lie-Ableitungen entlang eines Vektorfeldes  $\mathbf{v}$  der Ausgangsabbildung sind definiert zu

$$L_{\mathbf{v}}(h_{x,i})(\mathbf{x}) = \frac{\partial h_{x,i}}{\partial \mathbf{x}^T} \cdot \mathbf{v}. \quad (4.9)$$

Die Ableitung der Ausgangsabbildung kann im Block erfolgen, so dass gilt

$$L_{\mathbf{v}}(\mathbf{h}_x)(\mathbf{x}) = \frac{\partial \mathbf{h}_x}{\partial \mathbf{x}^T} \cdot \mathbf{v}. \quad (4.10)$$

Zur Berechnung der Lie-Ableitung wird zunächst der linke Term von Gleichung (4.10) berechnet. Die Ableitung der Ausgangsabbildung erfolgt zu

$$\frac{\partial \mathbf{h}_x}{\partial \mathbf{x}^T} = \begin{bmatrix} \xrightarrow{2n_{dof}} \frac{\partial \mathbf{h}_x}{\partial \mathbf{x}_A^T} & \xrightarrow{2n_f} \frac{\partial \mathbf{h}_x}{\partial \mathbf{x}_B^T} & \frac{\partial \mathbf{h}_x}{\partial \mathbf{x}_C^T} & \frac{\partial \mathbf{h}_x}{\partial \mathbf{x}_D^T} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{n_{dof}} & \mathbf{o} & \mathbf{o} & \mathbf{o} \\ \mathbf{o} & \mathbf{I}_{n_{dof}} & \mathbf{o} & \mathbf{o} \end{bmatrix}$$

Damit folgt für die Lie-Ableitung entlang des Driftfeldes  $\mathbf{f}_x$

$$\begin{aligned} L_{\mathbf{f}_x}(\mathbf{h}_x)(\mathbf{x}) &= \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{n_{dof}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_{n_{dof}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{f}_{x,A} \\ \mathbf{f}_{x,B} \\ \mathbf{f}_{x,C} \\ \mathbf{f}_{x,D} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_{x,A} \\ \mathbf{f}_{x,B} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{x}_B \\ \mathbf{M}_q^{-1} (\boldsymbol{\sigma} \mathbf{J}_q^T \mathbf{x}_C + \boldsymbol{\sigma} \mathbf{J}_q^T \text{diag}(\mathbf{x}_D) \boldsymbol{\sigma} \mathbf{J}_q \mathbf{x}_B - (\mathbf{C}_q \mathbf{x}_B + \mathbf{g}_q)) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Die ersten  $n_{dof}$  Komponenten der obigen Gleichung sind linear von den Ausgangsabbildungen abhängig und somit für die Suche nach den  $n$  unabhängigen Funktionen irrelevant. Für ihre weiteren Ableitungen gilt augenscheinlich ebenfalls, dass sie keine weiteren relevanten Funktionen beitragen. Daher wird die zweite Ableitung ausschließlich mit unteren Komponenten des Vektors gebildet

$$L_{\mathbf{f}_x}^2(\mathbf{h}_{x,B})(\mathbf{x}) = L_{\mathbf{f}_x}(\mathbf{M}_q^{-1} (\boldsymbol{\sigma} \mathbf{J}_q^T \mathbf{x}_C + \boldsymbol{\sigma} \mathbf{J}_q^T \text{diag}(\mathbf{x}_D) \boldsymbol{\sigma} \mathbf{J}_q \mathbf{x}_B - \mathbf{C}_q \mathbf{x}_B - \mathbf{g}_q))(\mathbf{x}).$$

Bei der Bildung der Lie-Ableitung kann ausgenutzt werden, dass das Driftfeld  $\mathbf{f}_x$  Nullkomponenten besitzt. Die Ableitung nach den Zustandsgrößen  $\mathbf{x}_C, \mathbf{x}_D$  kann daher entfallen. Die Ableitung nach den Positionen und Geschwindigkeiten ist auf Grund der starken Verkopplung in den Matrizen aufwändiger. Um zu einer einheitlichen Schreibweise zu gelangen, wird auf die Definition der Ableitung von Matrizen nach Vektoren in [42] zurückgegriffen. Unter Verwendung des Kroneckerproduktes und der Kroneckersumme können so die Ableitungsregeln aus dem skalaren Bereich übertragen werden. Die Interpretation der Lie-Ableitung als Zeitableitung stellt sicher, dass die Konstrukte auch existieren<sup>1</sup>. Damit lässt sich insbesondere auch die Coriolismatrix über die Massenmatrix definieren, siehe [43]

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_q &= (\dot{\mathbf{q}}^T \otimes \mathbf{I}_{n_{dof}}) \frac{\partial \mathbf{M}_q}{\partial \mathbf{q}} - \frac{1}{2} (\mathbf{I}_{n_{dof}} \otimes \dot{\mathbf{q}}^T) \frac{\partial \mathbf{M}_q}{\partial \mathbf{q}} \\ &= (\mathbf{x}_B^T \otimes \mathbf{I}_{n_{dof}}) \frac{\partial \mathbf{M}_q}{\partial \mathbf{x}_A} - \frac{1}{2} (\mathbf{I}_{n_{dof}} \otimes \mathbf{x}_B^T) \frac{\partial \mathbf{M}_q}{\partial \mathbf{x}_A}. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Die Ableitung der Komponente  $\mathbf{f}_{x,B}$  nach den Zustandsgrößen, wie es für die Lie-Ableitung benötigt wird, kann in Teilaufgaben unterteilt werden. Zunächst wird die Ableitung nach den generalisierten Antriebskoordinaten, repräsentiert durch die Größen  $\mathbf{x}_A$ , gebildet. Die Ableitung erfolgt separat für jeden Summanden.

Der Term geschwindigkeitsproportionale Reibung besitzt drei Faktoren, die von den Zu-

---

<sup>1</sup>Bei der Zeitableitung handelt es sich um die Differentiation nach einer skalaren Größe. Diese ist eindeutig definiert, so dass die Ableitung nach Matrizen und Vektoren hier wieder entsprechend kollabiert.

standsgrößen  $\mathbf{x}_A$  abhängen. Die Ableitung erfolgt daher mit Korollar 3 um die Faktoren zu isolieren

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_A} (M_q^{-1} \sigma \mathbf{J}_q^T \text{diag}(\mathbf{x}_D) \sigma \mathbf{J}_q \mathbf{x}_B) = \dots \\ \frac{\partial M_q^{-1} \sigma \mathbf{J}_q^T}{\partial \mathbf{x}_A^T} (\mathbf{I}_{n_{dof}} \otimes \text{diag}(\mathbf{x}_D) \sigma \mathbf{J}_q \mathbf{x}_B) + M_q^{-1} \sigma \mathbf{J}_q^T \frac{\partial \text{diag}(\mathbf{x}_D) \sigma \mathbf{J}_q \mathbf{x}_B}{\partial \mathbf{x}_A^T}. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Für die Ableitungen in den beiden Summanden kommt erneut die Produktregel zum Einsatz. Weiterhin wird die Ableitung der inversen Massenmatrix mittels Korollar 5 aufgelöst

$$\begin{aligned} \frac{\partial M_q^{-1} \sigma \mathbf{J}_q^T}{\partial \mathbf{x}_A^T} &= \frac{\partial M_q^{-1}}{\partial \mathbf{x}_A^T} (\mathbf{I}_{n_{dof}} \otimes \sigma \mathbf{J}_q^T) + M_q^{-1} \frac{\partial \sigma \mathbf{J}_q^T}{\partial \mathbf{x}_A^T} \\ &= -M_q^{-1} \frac{\partial M_q}{\partial \mathbf{x}_A^T} (\mathbf{I}_{n_{dof}} \otimes M_q^{-1}) (\mathbf{I}_{n_{dof}} \otimes \sigma \mathbf{J}_q^T) + M_q^{-1} \frac{\partial \sigma \mathbf{J}_q^T}{\partial \mathbf{x}_A^T} \end{aligned} \quad (4.13)$$

$$\frac{\partial \text{diag}(\mathbf{x}_D) \sigma \mathbf{J}_q \mathbf{x}_B}{\partial \mathbf{x}_A^T} = \text{diag}(\mathbf{x}_D) \frac{\partial \sigma \mathbf{J}_q}{\partial \mathbf{x}_A^T} (\mathbf{I}_{n_{dof}} \otimes \mathbf{x}_B) \quad (4.14)$$

Durch Einsetzen von Gleichungen (4.13) und (4.14) in Gleichung (4.12) ist die Ableitung der geschwindigkeitsabhängigen Reibung

$$\begin{aligned} \frac{\partial (M_q^{-1} \sigma \mathbf{J}_q^T \text{diag}(\mathbf{x}_D) \sigma \mathbf{J}_q \mathbf{x}_B)}{\partial \mathbf{x}_A} = \\ M_q^{-1} \sigma \mathbf{J}_q^T \text{diag}(\mathbf{x}_D) \frac{\partial \sigma \mathbf{J}_q}{\partial \mathbf{x}_A^T} (\mathbf{I}_{n_{dof}} \otimes \mathbf{x}_B) - \dots \\ M_q^{-1} \frac{\partial M_q}{\partial \mathbf{x}_A^T} (\mathbf{I}_{n_{dof}} \otimes M_q^{-1} \sigma \mathbf{J}_q^T \text{diag}(\mathbf{x}_D) \sigma \mathbf{J}_q \mathbf{x}_B), \end{aligned} \quad (4.15)$$

wobei die Multiplikationen der Form  $\prod (\mathbf{I}_{n_{dof}} \otimes \mathbf{v}_i)$  nach Korollar 1 zusammengefasst sind. Die Ableitung des Summanden mit Coulombscher Reibung ist ähnlich zu den obigen Gleichungen. Die Aufteilung ist analog zu Gleichung (4.12), nur dass der abgespaltene Vektor unabhängig von  $\mathbf{x}_A$  ist und seine Ableitung folglich Null ist. Damit ist

$$\begin{aligned} \frac{\partial M_q^{-1} \sigma \mathbf{J}_q^T \mathbf{x}_C}{\partial \mathbf{x}_A^T} &= M_q^{-1} \frac{\partial \sigma \mathbf{J}_q^T}{\partial \mathbf{x}_A^T} (\mathbf{I}_{n_{dof}} \otimes \mathbf{x}_C) - \dots \\ &M_q^{-1} \frac{\partial M_q}{\partial \mathbf{x}_A^T} (\mathbf{I}_{n_{dof}} \otimes (M_q^{-1} \sigma \mathbf{J}_q^T \mathbf{x}_C)). \end{aligned} \quad (4.16)$$

Die Reibungsanteile sind durch die Gleichungen (4.15) und (4.16) beschrieben. Es bleiben die Anteile des ursprünglichen Robotermodells. Auch hier gleicht die Struktur der Terme den bereits behandelten. Die Ableitungen der mit der inversen Massenmatrix multiplizierten

Coriolisterme und konservativen Kräfte sind daher

$$\frac{\partial \mathbf{M}_q^{-1} \mathbf{g}_q}{\partial \mathbf{x}_A^T} = \mathbf{M}_q^{-1} \frac{\partial \mathbf{g}_q}{\partial \mathbf{x}_A^T} - \mathbf{M}_q^{-1} \frac{\partial \mathbf{M}_q}{\partial \mathbf{x}_A^T} (\mathbf{I}_{n_{dof}} \otimes (\mathbf{M}_q^{-1} \mathbf{g}_q)) \quad (4.17)$$

$$\frac{\partial \mathbf{M}_q^{-1} \mathbf{C}_q \mathbf{x}_B}{\partial \mathbf{x}_A^T} = \mathbf{M}_q^{-1} \frac{\partial \mathbf{C}_q}{\partial \mathbf{x}_A^T} (\mathbf{I}_{n_{dof}} \otimes \mathbf{x}_B) - \mathbf{M}_q^{-1} \frac{\partial \mathbf{M}_q}{\partial \mathbf{x}_A^T} (\mathbf{I}_{n_{dof}} \otimes (\mathbf{M}_q^{-1} \mathbf{C}_q \mathbf{x}_B)) \quad (4.18)$$

Mit den Gleichungen (4.15) bis (4.18) stehen nun die Ableitungen nach dem ersten Block der Zustandsvariablen zur Verfügung. Die Ableitung der Komponente  $\mathbf{f}_{\mathbf{x},B}$  nach den generalisierten Geschwindigkeiten, repräsentiert durch die Zustandsgrößen  $\mathbf{x}_B$ , ist bei nur zwei der Summanden von Null verschieden: Der geschwindigkeitsabhängigen Reibung und den Corioliskräften

$$\frac{\partial \mathbf{M}_q^{-1} {}^\sigma \mathbf{J}_q^T \text{diag}(\mathbf{x}_D) {}^\sigma \mathbf{J}_q \mathbf{x}_B}{\partial \mathbf{x}_B^T} = \mathbf{M}_q^{-1} {}^\sigma \mathbf{J}_q^T \text{diag}(\mathbf{x}_D) {}^\sigma \mathbf{J}_q, \quad (4.19)$$

$$\frac{\partial -\mathbf{M}_q^{-1} \mathbf{C}_q \mathbf{x}_B}{\partial \mathbf{x}_B^T} = -\mathbf{M}_q^{-1} \frac{\partial \mathbf{C}_q}{\partial \mathbf{x}_B^T} (\mathbf{I}_{n_{dof}} \otimes \mathbf{x}_B) - \mathbf{M}_q^{-1} \mathbf{C}_q. \quad (4.20)$$

Mit Hilfe der obigen Teilergebnisse lassen sich nun die Lie-Ableitungen bilden. Es stehen damit insgesamt  $4n_{dof}$  Funktionen aus dem Beobachtbarkeitsraum zur Verfügung, um die Rangbedingung in Satz 1 zu überprüfen. Dies entspricht nicht notwendigerweise dem Systemgrad  $n$ . Die Dimension der Ausgangsabbildung bedingt, dass ohne Verletzung der Symmetrie nur Vielfache der Systemordnung erreichbar sind. Die Multiplikation der obigen Ableitungen mit den entsprechenden Komponenten des Driftfeldes ergibt

$$\mathbf{L}_{\mathbf{f}_x}^2(\mathbf{h}_{\mathbf{x},B})(\mathbf{x}) = \frac{\partial \mathbf{f}_{\mathbf{x},B}}{\partial \mathbf{x}_A^T} \mathbf{x}_B + \frac{\partial \mathbf{f}_{\mathbf{x},B}}{\partial \mathbf{x}_B^T} \mathbf{f}_{\mathbf{x},B}.$$

In der Gesamtgleichung existieren Terme, die sich zusammenfassen lassen:

$$\begin{aligned} -\mathbf{M}_q^{-1} \frac{\partial \mathbf{M}_q}{\partial \mathbf{x}_A^T} (\mathbf{I}_{n_{dof}} \otimes (\mathbf{M}_q^{-1} \mathbf{C}_q \mathbf{x}_B)) \mathbf{x}_B &= -\mathbf{M}_q^{-1} (\mathbf{x}_B^T \otimes \mathbf{I}_{n_{dof}}) \frac{\partial \mathbf{M}_q}{\partial \mathbf{x}_A} \mathbf{M}_q^{-1} \mathbf{C}_q \mathbf{x}_B \\ \mathbf{M}_q^{-1} \frac{\partial \mathbf{M}_q}{\partial \mathbf{x}_A^T} (\mathbf{I}_{n_{dof}} \otimes (\mathbf{M}_q^{-1} \mathbf{g}_q)) \mathbf{x}_B &= \mathbf{M}_q^{-1} (\mathbf{x}_B^T \otimes \mathbf{I}_{n_{dof}}) \frac{\partial \mathbf{M}_q}{\partial \mathbf{x}_A} \mathbf{M}_q^{-1} \mathbf{g}_q \\ \mathbf{M}_q^{-1} \frac{\partial \mathbf{M}_q}{\partial \mathbf{x}_A^T} (\mathbf{I}_{n_{dof}} \otimes (\mathbf{M}_q^{-1} {}^\sigma \mathbf{J}_q^T \mathbf{x}_C)) \mathbf{x}_B &= \mathbf{M}_q^{-1} (\mathbf{x}_B^T \otimes \mathbf{I}_{n_{dof}}) \frac{\partial \mathbf{M}_q}{\partial \mathbf{x}_A} \mathbf{M}_q^{-1} {}^\sigma \mathbf{J}_q^T \mathbf{x}_C \\ \mathbf{M}_q^{-1} \frac{\partial \mathbf{M}_q}{\partial \mathbf{x}_A^T} (\mathbf{I}_{n_{dof}} \otimes \mathbf{M}_q^{-1} {}^\sigma \mathbf{J}_q^T \text{diag}(\mathbf{x}_D) {}^\sigma \mathbf{J}_q \mathbf{x}_B) \mathbf{x}_B &= \\ &= \mathbf{M}_q^{-1} (\mathbf{x}_B^T \otimes \mathbf{I}_{n_{dof}}) \frac{\partial \mathbf{M}_q}{\partial \mathbf{x}_A} \mathbf{M}_q^{-1} {}^\sigma \mathbf{J}_q^T \text{diag}(\mathbf{x}_D) {}^\sigma \mathbf{J}_q \mathbf{x}_B. \end{aligned}$$

Die obigen Umformungen der zweiten Summanden der Gleichungen (4.15) bis (4.18) erfolgten



mittels der Zerlegung der Coriolismatrix nach Gleichung (4.11) sowie der Anwendung der Äquivalenzumformungen 1 und 2. Die so entstandenen Terme sind identisch mit einem Teil des zweiten Summanden aus Gleichung (4.20). Da diese die gleiche Struktur besitzen, wird ein Summand des voll ausmultiplizierten Terms mit  $\mathbf{v}$  abgekürzt

$$-\mathbf{M}_q^{-1} \mathbf{C}_q \mathbf{v} = -\mathbf{M}_q^{-1} \left( \underbrace{(\mathbf{x}_B^T \otimes \mathbf{I}_{n_{dof}})}_{\text{}} \underbrace{\frac{\partial \mathbf{M}_q}{\partial \mathbf{x}_A}}_{\text{}} - \frac{1}{2} \underbrace{(\mathbf{I}_{n_{dof}} \otimes \mathbf{x}_B^T)}_{\text{}} \underbrace{\frac{\partial \mathbf{M}_q}{\partial \mathbf{x}_A}}_{\text{}} \right) \mathbf{v}.$$

Auf Grund des gleichen Vorzeichens kompensieren sich die Terme jedoch nicht. Die Auflösung der anderen Terme erlaubt zunächst keine weiteren Vereinfachungen, so dass die zweite Lie-Ableitung lautet

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_{\mathbf{f}_x}^2(\mathbf{h}_x)(\mathbf{x}) = & \dots \\ & \mathbf{M}_q^{-1} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{J}_q^T \text{diag}(\mathbf{x}_D) \frac{\partial \boldsymbol{\sigma} \mathbf{J}_q}{\partial \mathbf{x}_A^T} (\mathbf{I}_{n_{dof}} \otimes \mathbf{x}_B) \mathbf{x}_B \dots \\ & + \mathbf{M}_q^{-1} \frac{\partial \boldsymbol{\sigma} \mathbf{J}_q^T}{\partial \mathbf{x}_A^T} (\mathbf{I}_{n_{dof}} \otimes \text{diag}(\mathbf{x}_D) \boldsymbol{\sigma} \mathbf{J}_q \mathbf{x}_B) \mathbf{x}_B \dots \\ & - 2\mathbf{M}_q^{-1} \frac{\partial \mathbf{M}_q}{\partial \mathbf{x}_A^T} (\mathbf{I}_{n_{dof}} \otimes \mathbf{M}_q^{-1} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{J}_q^T \text{diag}(\mathbf{x}_D) \boldsymbol{\sigma} \mathbf{J}_q \mathbf{x}_B) \mathbf{x}_B \dots \\ & + \mathbf{M}_q^{-1} \frac{\partial \boldsymbol{\sigma} \mathbf{J}_q^T}{\partial \mathbf{x}_A^T} (\mathbf{I}_{n_{dof}} \otimes \mathbf{x}_C) \mathbf{x}_B - 2\mathbf{M}_q^{-1} \frac{\partial \mathbf{M}_q}{\partial \mathbf{x}_A^T} (\mathbf{I}_{n_{dof}} \otimes (\mathbf{M}_q^{-1} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{J}_q^T \mathbf{x}_C)) \mathbf{x}_B \dots \\ & - \mathbf{M}_q^{-1} \frac{\partial \mathbf{g}_q}{\partial \mathbf{x}_A^T} \mathbf{x}_B + 2\mathbf{M}_q^{-1} \frac{\partial \mathbf{M}_q}{\partial \mathbf{x}_A^T} (\mathbf{I}_{n_{dof}} \otimes (\mathbf{M}_q^{-1} \mathbf{g}_q)) \mathbf{x}_B \dots \\ & - \mathbf{M}_q^{-1} \frac{\partial \mathbf{C}_q}{\partial \mathbf{x}_A^T} (\mathbf{I}_{n_{dof}} \otimes \mathbf{x}_B) \mathbf{x}_B + 2\mathbf{M}_q^{-1} \frac{\partial \mathbf{M}_q}{\partial \mathbf{x}_A^T} (\mathbf{I}_{n_{dof}} \otimes (\mathbf{M}_q^{-1} \mathbf{C}_q \mathbf{x}_B)) \mathbf{x}_B \dots \\ & + \mathbf{M}_q^{-1} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{J}_q^T \text{diag}(\mathbf{x}_D) \boldsymbol{\sigma} \mathbf{J}_q \mathbf{f}_{x,B} - \mathbf{M}_q^{-1} \frac{\partial \mathbf{C}_q}{\partial \mathbf{x}_B^T} (\mathbf{I}_{n_{dof}} \otimes \mathbf{x}_B) \mathbf{f}_{x,B} \dots \\ & - \mathbf{M}_q^{-1} \frac{1}{2} (\mathbf{I}_{n_{dof}} \otimes \mathbf{x}_B^T) \frac{\partial \mathbf{M}_q}{\partial \mathbf{x}_A} \mathbf{f}_{x,B} \end{aligned} \quad (4.21)$$

Um den Rangtest durchzuführen, wird nun die Kodistribution in den lokalen Koordinaten gebildet, die aus den partiellen Ableitungen der Funktionen des Beobachtbarkeitsraums besteht. Als Funktionen stehen nun zur Verfügung

$$\mathbf{h}_{x,A}, \mathbf{h}_{x,B}, \mathbf{L}_{\mathbf{f}_x}(\mathbf{h}_{x,B})(\mathbf{x}), \mathbf{L}_{\mathbf{f}_x}^2(\mathbf{h}_{x,B})(\mathbf{x}) \in \mathcal{O}. \quad (4.22)$$

Die partielle Ableitung der Funktionen nach  $\mathbf{x}$  ist zum Teil bereits zur Bestimmung obigen Lie-Ableitungen geschehen. Es fehlt die partielle Ableitung der zweiten Lie-Ableitung der Teilfunktionen  $\mathbf{h}_{x,B}$  der Ausgangsabbildung. Um eine gleichförmige Beobachtbarkeit zu erreichen, fordert Satz 1 die entsprechende Dimension der Kodistribution des Beobachtbar-

keitsraums in allen Zuständen  $\mathbf{x} \in \mathcal{M}$ . Die partielle Ableitung der Ausgangsabbildung liefert  $2n_{dof}$  linear unabhängige Vektoren, unabhängig vom Systemzustand. Auf Grund der Wahl der Antriebskoordinaten als Bezugssystem ist die Ableitung einfach. Die folgenden Vektoren müssen demnach diejenigen Dimensionen aufspannen, die mit den Zuständen  $\mathbf{x}_C, \mathbf{x}_D$  assoziiert sind. Daher wird die Ableitung nach den Zuständen  $\mathbf{x}_A, \mathbf{x}_B$  für diese Betrachtung weggelassen

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}^T} L_{f_x}(\mathbf{h}_x)(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} * & * & \mathbf{M}_q^{-1} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{J}_q^T & \mathbf{M}_q^{-1} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{J}_q^T \text{diag}(\boldsymbol{\sigma} \mathbf{J}_q \mathbf{x}_B) \end{bmatrix}. \quad (4.23)$$

Die Ableitung nach Gleichung (4.23) erweitert den aufgespannten Raum genau dann um  $n_{dof}$  Dimensionen, wenn das Produkt der Matrizen  $\mathbf{M}_q^{-1} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{J}_q^T$  den Mindestrang  $n_{dof}$  hat. Dies bedeutet die Jakobimatrix darf keinen Rangverlust besitzen, folglich darf der Roboter nicht in einer singulären Position stehen. Die Einschränkung gilt demnach nur für einzelne Punkte im Arbeitsraum.

Bei der partiellen Ableitung der zweifachen Lie-Ableitung der Ausgangsabbildung werden ebenfalls die Ableitungen nach den Zuständen  $\mathbf{x}_A, \mathbf{x}_B$  nicht bestimmt, da diese keine neuen Informationen tragen. Zunächst werden diejenigen Terme herausgenommen, die den Zustand  $\mathbf{x}_C$  enthalten. Die Abhängigkeit ist in allen Termen linear, und  $\mathbf{x}_C$  lässt sich mit Hilfe der Äquivalenzumformung 1 stets so isolieren, dass die Ableitung einfach durchführbar ist. Zur Verkürzung der Gleichungen wird die allen Termen gemeine Linksmultiplikation mit der inversen Massenmatrix ausgelassen sowie  $\mathbf{T} = \mathbf{M}_q^{-1} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{J}_q^T$  gesetzt

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_C^T} \left( \frac{\partial \boldsymbol{\sigma} \mathbf{J}_q^T}{\partial \mathbf{x}_A^T} (\mathbf{I}_{n_{dof}} \otimes \mathbf{x}_C) \mathbf{x}_B \right) &= \frac{\partial \boldsymbol{\sigma} \mathbf{J}_q^T}{\partial \mathbf{x}_A^T} (\mathbf{x}_B \otimes \mathbf{I}_{n_{dof}}) \\ \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_C^T} \left( -2 \frac{\partial \mathbf{M}_q}{\partial \mathbf{x}_A^T} (\mathbf{I}_{n_{dof}} \otimes (\mathbf{T} \mathbf{x}_C)) \mathbf{x}_B \right) &= -2 \frac{\partial \mathbf{M}_q}{\partial \mathbf{x}_A^T} (\mathbf{x}_B \otimes \mathbf{I}_{n_{dof}}) \mathbf{T} \\ \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_C^T} (\boldsymbol{\sigma} \mathbf{J}_q^T \text{diag}(\mathbf{x}_D) \boldsymbol{\sigma} \mathbf{J}_q \mathbf{T} \mathbf{x}_C) &= \boldsymbol{\sigma} \mathbf{J}_q^T \text{diag}(\mathbf{x}_D) \boldsymbol{\sigma} \mathbf{J}_q \mathbf{T} \\ - \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_C^T} \left( \frac{\partial \mathbf{C}_q}{\partial \mathbf{x}_B^T} (\mathbf{I}_{n_{dof}} \otimes \mathbf{x}_B) \mathbf{T} \mathbf{x}_C \right) &= \frac{\partial \mathbf{C}_q}{\partial \mathbf{x}_B^T} (\mathbf{I}_{n_{dof}} \otimes \mathbf{x}_B) \mathbf{T} \\ - \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_C^T} \left( \frac{1}{2} (\mathbf{I}_{n_{dof}} \otimes \mathbf{x}_B^T) \frac{\partial \mathbf{M}_q}{\partial \mathbf{x}_A} \mathbf{T} \mathbf{x}_C \right) &= \frac{1}{2} (\mathbf{I}_{n_{dof}} \otimes \mathbf{x}_B^T) \frac{\partial \mathbf{M}_q}{\partial \mathbf{x}_A} \mathbf{T}. \end{aligned}$$

Um die Rangbedingung zu analysieren werden auch die Ableitungen nach der geschwindigkeitsproportionalen Reibung benötigt. Diese sind jedoch nicht sämtlich linear. Unter Ausnutzung von Äquivalenzumformung 1 sowie der Äquivalenz  $\text{diag}(\mathbf{x})\mathbf{z} = \text{diag}(\mathbf{z})\mathbf{x}$  kann in den linearen Termen  $\mathbf{x}_D$  für die Rechnung günstig isoliert werden. Auch hier ist die führende

inverse Massenmatrix ausgelassen und  $\mathbf{R} = \mathbf{M}_q^{-1} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{J}_q^T \text{diag}(\boldsymbol{\sigma} \mathbf{J}_q \mathbf{x}_B)$  als Abkürzung eingeführt

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_D^T} \left( \boldsymbol{\sigma} \mathbf{J}_q^T \text{diag}(\mathbf{x}_D) \frac{\partial \boldsymbol{\sigma} \mathbf{J}_q}{\partial \mathbf{x}_A^T} (\mathbf{I}_{n_{\text{dof}}} \otimes \mathbf{x}_B) \mathbf{x}_B \right) &= \boldsymbol{\sigma} \mathbf{J}_q^T \text{diag} \left( \frac{\partial \boldsymbol{\sigma} \mathbf{J}_q}{\partial \mathbf{x}_A^T} (\mathbf{I}_{n_{\text{dof}}} \otimes \mathbf{x}_B) \mathbf{x}_B \right) \\
\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_D^T} \left( -2 \frac{\partial \mathbf{M}_q}{\partial \mathbf{x}_A^T} (\mathbf{I}_{n_{\text{dof}}} \otimes \mathbf{R} \mathbf{x}_D) \mathbf{x}_B \right) &= -2 \frac{\partial \mathbf{M}_q}{\partial \mathbf{x}_A^T} (\mathbf{x}_B \otimes \mathbf{I}_{n_{\text{dof}}}) \mathbf{R} \\
- \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_D^T} \left( \frac{\partial \mathbf{C}_q}{\partial \mathbf{x}_B^T} (\mathbf{I}_{n_{\text{dof}}} \otimes \mathbf{x}_B) \mathbf{R} \mathbf{x}_D \right) &= \frac{\partial \mathbf{C}_q}{\partial \mathbf{x}_B^T} (\mathbf{I}_{n_{\text{dof}}} \otimes \mathbf{x}_B) \mathbf{R} \\
\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_D^T} \left( \frac{1}{2} (\mathbf{I}_{n_{\text{dof}}} \otimes \mathbf{x}_B^T) \frac{\partial \mathbf{M}_q}{\partial \mathbf{x}_A} \mathbf{R} \mathbf{x}_D \right) &= \frac{1}{2} (\mathbf{I}_{n_{\text{dof}}} \otimes \mathbf{x}_B^T) \frac{\partial \mathbf{M}_q}{\partial \mathbf{x}_A} \mathbf{R} \\
\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_D^T} (\boldsymbol{\sigma} \mathbf{J}_q^T \text{diag}(\mathbf{x}_D) \boldsymbol{\sigma} \mathbf{J}_q (\mathbf{f}_{\mathbf{x},B} - \mathbf{R} \mathbf{x}_D)) &= \boldsymbol{\sigma} \mathbf{J}_q^T \text{diag}(\mathbf{f}_{\mathbf{x},B} - \mathbf{R} \mathbf{x}_D) \boldsymbol{\sigma} \mathbf{J}_q
\end{aligned}$$

In der letzten Gleichung ist der Ausdruck  $\mathbf{f}_{\mathbf{x},B} - \mathbf{R} \mathbf{x}_D$  vom Zustand  $\mathbf{x}_D$  unabhängig. In einem letzten Schritt folgt nun die Ableitung des nichtlinearen Terms. Er ist bilinear bzgl. der Komponenten des Teilzustandsvektors  $\mathbf{x}_D$

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_D^T} (\mathbf{M}_q^{-1} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{J}_q^T \text{diag}(\mathbf{x}_D) \boldsymbol{\sigma} \mathbf{J}_q \mathbf{M}_q^{-1} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{J}_q^T \text{diag}(\mathbf{x}_D) \boldsymbol{\sigma} \mathbf{J}_q \mathbf{x}_B) \\
&= \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_D^T} \left( (\mathbf{M}_q^{-1} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{J}_q^T \text{diag}(\mathbf{x}_D) \boldsymbol{\sigma} \mathbf{J}_q)^2 \mathbf{x}_B \right) = \frac{\partial \mathbf{U}_1^2}{\partial \mathbf{x}_D^T} (\mathbf{I}_{n_{\text{dof}}} \otimes \mathbf{x}_B) \\
&\quad \text{mit } \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_D^T} (\mathbf{M}_q^{-1} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{J}_q^T \text{diag}(\mathbf{x}_D) \boldsymbol{\sigma} \mathbf{J}_q) = \mathbf{M}_q^{-1} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{J}_q^T \mathbf{U}_2 (\mathbf{I}_{n_{\text{dof}}} \otimes \boldsymbol{\sigma} \mathbf{J}_q) \\
&\quad \mathbf{U}_1 = \mathbf{M}_q^{-1} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{J}_q^T \text{diag}(\mathbf{x}_D) \boldsymbol{\sigma} \mathbf{J}_q, \quad \mathbf{U}_2 = \frac{\partial \text{diag}(\mathbf{x}_D)}{\partial \mathbf{x}_D^T} \\
&= \mathbf{M}_q^{-1} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{J}_q^T \mathbf{U}_2 (\mathbf{I}_{n_{\text{dof}}} \otimes \boldsymbol{\sigma} \mathbf{J}_q) (\mathbf{I}_{n_{\text{dof}}} \otimes \mathbf{U}_1) (\mathbf{I}_{n_{\text{dof}}} \otimes \mathbf{x}_B) + \dots \\
&\quad \mathbf{U}_1 \mathbf{M}_q^{-1} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{J}_q^T \mathbf{U}_2 (\mathbf{I}_{n_{\text{dof}}} \otimes \boldsymbol{\sigma} \mathbf{J}_q) (\mathbf{I}_{n_{\text{dof}}} \otimes \mathbf{x}_B) \\
&\quad \text{mit } \mathbf{U}_2 = [\mathbf{U}_{2,1}, \dots, \mathbf{U}_{2,n_{\text{dof}}}], \mathbf{U}_{2,i}: \mathbf{M} \in \mathbb{R}^{n_f \times n_f} \begin{cases} m_{j,k} = 1 & : j = k = i \\ m_{j,k} = 0 & : \text{sonst} \end{cases} \\
&\quad \mathbf{U}_2 (\mathbf{I}_{n_{\text{dof}}} \otimes \mathbf{v}) = [\mathbf{U}_{2,1} \mathbf{v}, \dots, \mathbf{U}_{2,n_{\text{dof}}} \mathbf{v}] = \text{diag}(\mathbf{v}) \\
&= \mathbf{M}_q^{-1} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{J}_q^T \text{diag}(\boldsymbol{\sigma} \mathbf{J}_q \mathbf{U}_1 \mathbf{x}_B) + \mathbf{U}_1 \mathbf{M}_q^{-1} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{J}_q^T \text{diag}(\boldsymbol{\sigma} \mathbf{J}_q \mathbf{x}_B)
\end{aligned}$$

### 4.2.1 Untersuchung der Beobachtbarkeit des vereinfachten Systems

Damit liegen die notwendigen partiellen Ableitungen der Funktionen aus Gleichung (4.22) vor. Die Untersuchung der Beobachtbarkeit erfolgt zunächst für ein vereinfachtes System, um die Komplexität der Gleichungen zu reduzieren. Im späteren Verlauf des Abschnitts werden die getroffenen Einschränkungen zurückgenommen, um eine allgemein gültige Aussage über die Beobachtbarkeit zu erzielen. Die temporär angenommenen Einschränkungen lauten:

1. Konstante Massenmatrix  $\mathbf{M}_q$ . Dies ist eine harte Einschränkung an das System, lässt jedoch viele Gleichungen kollabieren. Es bedeutet insbesondere auch nach Gleichung (4.11), dass die Coriolismatrix Null ist.
2. Konstante Jakobimatrix  $\sigma \mathbf{J}_q$ . Die Jakobimatrix ist unter anderem konstant, wenn die Reibung in den aktiven Gelenken beobachtet werden soll. Die Beobachtbarkeit sollte auch in diesem Fall sichergestellt sein.
3. Keine konservativen Kräfte  $\mathbf{g}_q = \mathbf{o}$ . Die Beobachtbarkeit soll nicht an die Existenz z. B. vom Gravitationsfeld gebunden sein.

Unter den obigen Bedingungen vereinfachen sich die Ableitungen zu

$$\begin{aligned} \frac{\partial L_{f_x}^2(\mathbf{h}_x)(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}_C} &= \mathbf{M}_q^{-1} \sigma \mathbf{J}_q^T \text{diag}(\mathbf{x}_D) \sigma \mathbf{J}_q \mathbf{M}_q^{-1} \sigma \mathbf{J}_q^T \\ \frac{\partial L_{f_x}^2(\mathbf{h}_x)(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}_D} &= \mathbf{M}_q^{-1} \sigma \mathbf{J}_q^T \text{diag}(\mathbf{M}_q^{-1} \sigma \mathbf{J}_q^T \mathbf{x}_C) \sigma \mathbf{J}_q + \\ &\quad \mathbf{M}_q^{-1} \sigma \mathbf{J}_q^T \text{diag}(\sigma \mathbf{J}_q \mathbf{U}_1 \mathbf{x}_B) + \mathbf{U}_1 \mathbf{M}_q^{-1} \sigma \mathbf{J}_q^T \text{diag}(\sigma \mathbf{J}_q \mathbf{x}_B) \\ \text{mit } \mathbf{U}_1 &= \mathbf{M}_q^{-1} \sigma \mathbf{J}_q^T \text{diag}(\mathbf{x}_D) \sigma \mathbf{J}_q \end{aligned}$$

Sämtliche Gleichungen hängen dabei von den Parametern  $\mathbf{x}_C, \mathbf{x}_D$  selbst ab. Unter der Voraussetzung, dass Massen- und Jakobimatrix regulär sind, wird der geforderte Rang nach Satz 1 erreicht, genau dann wenn die zu beobachtenden Größen  $\mathbf{x}_C, \mathbf{x}_D$  von Null verschieden sind.

Das angesetzte Kriterium ist jedoch hinreichend und keine notwendige Voraussetzung für Beobachtbarkeit. Die Beobachtbarkeit eines Systems basiert auf der Rekonstruktion der Zustände anhand der Ausgangsgrößen und deren Ableitungen. Die Prüfung der Invertierbarkeit der Beobachtbarkeitsabbildung gibt daher näheren Aufschluss über das System. Unter den obigen Voraussetzungen vereinfachen sich die Ableitungen, so dass die Inversion der Abbildung möglich ist. Die Interpretation der Lie-Ableitung als Zeitableitungen ist nur für ungesteuerte Systeme richtig. Die folgenden Rechnungen beziehen sich daher auf das System ohne Eingang

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} \mathbf{h}_{x,A} \\ \mathbf{h}_{x,B} \\ \mathbf{L}_{f_x} \mathbf{h}_{x,B} \\ \mathbf{L}_{f_x}^2 \mathbf{h}_{x,B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_A \\ \mathbf{x}_B \\ \mathbf{M}_q^{-1} \sigma \mathbf{J}_q^T (\mathbf{x}_C + \text{diag}(\mathbf{x}_D) \sigma \mathbf{J}_q \mathbf{x}_B) \\ \mathbf{M}_q^{-1} \sigma \mathbf{J}_q^T \text{diag}(\mathbf{x}_D) \sigma \mathbf{J}_q \mathbf{f}_x \end{bmatrix}.$$

Die Inversion der ersten beiden vektoriellen Komponenten der Abbildung ist trivial. Für die übrigen gilt

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_D &= \mathbf{M}_q^{-1} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{J}_q^T \text{diag}(\mathbf{x}_D) \boldsymbol{\sigma} \mathbf{J}_q \mathbf{q}_C \Leftrightarrow \boldsymbol{\sigma} \mathbf{J}_q^{-T} \mathbf{M}_q \mathbf{q}_D = \text{diag}(\boldsymbol{\sigma} \mathbf{J}_q \mathbf{q}_C) \mathbf{x}_D \\ &\Rightarrow \mathbf{x}_D = (\text{diag}(\boldsymbol{\sigma} \mathbf{J}_q \mathbf{q}_C))^{-1} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{J}_q^{-T} \mathbf{M}_q \mathbf{q}_D \\ \mathbf{x}_C &= \boldsymbol{\sigma} \mathbf{J}_q^{-T} \mathbf{M}_q \mathbf{q}_C - \text{diag}((\text{diag}(\boldsymbol{\sigma} \mathbf{J}_q \mathbf{q}_C))^{-1} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{J}_q^{-T} \mathbf{M}_q \mathbf{q}_D) \boldsymbol{\sigma} \mathbf{J}_q \mathbf{x}_B. \end{aligned}$$

Die Umkehrung der lautet daher

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_A &= \mathbf{q}_A \quad \mathbf{x}_C = \boldsymbol{\sigma} \mathbf{J}_q^{-T} \mathbf{M}_q \mathbf{q}_C - \text{diag}((\text{diag}(\boldsymbol{\sigma} \mathbf{J}_q \mathbf{q}_C))^{-1} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{J}_q^{-T} \mathbf{M}_q \mathbf{q}_D) \boldsymbol{\sigma} \mathbf{J}_q \mathbf{q}_B \\ \mathbf{x}_B &= \mathbf{q}_B \quad \mathbf{x}_D = (\text{diag}(\boldsymbol{\sigma} \mathbf{J}_q \mathbf{q}_C))^{-1} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{J}_q^{-T} \mathbf{M}_q \mathbf{q}_D. \end{aligned}$$

Die Invertierung der Abbildung in den obigen Gleichungen erfordert die Invertierbarkeit der Diagonalmatrix  $\text{diag}(\boldsymbol{\sigma} \mathbf{J}_q \mathbf{q}_C)$ . Dies bedeutet, dass die mit der Jakobimatrix transformierten Komponenten der Abbildung von Null verschieden sind. Unter den gegebenen Voraussetzungen entsprechen diese den Beschleunigungen in den passiven Gelenken. Diese Voraussetzung ist intuitiv erfassbar: Bei konstanter Geschwindigkeit lassen sich Coulombsche und geschwindigkeitsproportionale Reibung nicht unterscheiden.

Bei gesteuerten Systemen ist die Zeitableitung über die Kettenregel unter Einbeziehung der Eingangsgrößen definiert, siehe [13]. Im Gegensatz zu den Zuständen sind die zeitlichen Ableitungen der Eingangsgrößen nicht substituierbar und werden in die Definition aufgenommen

$$\frac{d k(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}, \dots, \frac{d^n \mathbf{u}}{d t^n})}{d t} = \frac{\partial k(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}, \dots, \frac{d^n \mathbf{u}}{d t^n})}{\partial \mathbf{x}^T} \dot{\mathbf{x}} + \sum_{i=0}^n \frac{\partial k(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}, \dots, \frac{d^n \mathbf{u}}{d t^n})}{\partial \left( \frac{d^i \mathbf{u}}{d t^i} \right)^T} \frac{d^{(i+1)} \mathbf{u}}{d t^{(i+1)}}.$$

Der zugehörige Differentialoperator ist analog zur Lie-Ableitung definiert. Bei der Anwendung auf die Ausgangsabbildung eines Systems liegt der maximale Grad der Ableitung des Eingangsvektors fest, so dass diese Information im Operator fixiert ist

$$\mathbf{N}_{\mathbf{f}_x}^0 \mathbf{h}_x = \mathbf{h}_x \quad \mathbf{N}_{\mathbf{f}_x}^n \mathbf{h}_x = \frac{\partial (\mathbf{N}_{\mathbf{f}_x}^{n-1} \mathbf{h}_x)}{\partial \mathbf{x}^T} \mathbf{f}_x + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\partial \mathbf{N}_{\mathbf{f}_x}^{n-1} \mathbf{h}_x}{\partial \left( \frac{d^i \mathbf{u}}{d t^i} \right)^T} \frac{d^{(i+1)} \mathbf{u}}{d t^{(i+1)}} \quad (4.24)$$

Die Invertierbarkeit der mit Rücksicht auf die Eingangsgrößen definierten Beobachtbarkeitsabbildung ändert sich in den Komponenten  $\mathbf{q}_C, \mathbf{q}_D$

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_C &= \mathbf{N}_{\mathbf{f}_x} \mathbf{h}_{x,B} = \mathbf{M}_q^{-1} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{J}_q^T (\mathbf{x}_C + \text{diag}(\mathbf{x}_D) \boldsymbol{\sigma} \mathbf{J}_q \mathbf{x}_B) + \mathbf{M}_q^{-1} \boldsymbol{\tau}_d \\ \mathbf{q}_D &= \mathbf{N}_{\mathbf{f}_x}^2 \mathbf{h}_{x,B} = \mathbf{M}_q^{-1} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{J}_q^T \text{diag}(\mathbf{x}_D) \boldsymbol{\sigma} \mathbf{J}_q \underbrace{(\mathbf{f}_x + \mathbf{M}_q^{-1} \boldsymbol{\tau}_d)}_{\mathbf{q}_C} + \mathbf{M}_q^{-1} \dot{\boldsymbol{\tau}}_d. \end{aligned}$$

Die Berücksichtigung der Eingangsgröße ändert die Bedingungen zur Invertierung nicht, die Komponente  $\mathbf{q}_C$  enthält zusätzlich die Eingangsgröße des Systems. Zusätzlich enthalten die Gleichungen die Ableitung der Eingangsgröße, so dass die Forderung nach hinreichend glatten Trajektorien hinzukommt.

**Beispiel 1** Gegeben ist das durch die folgende Differentialgleichung beschriebene System

$$J\ddot{\phi} = u - bf_c - bf_v b\dot{\phi}.$$

Beim Übertrag in den Zustandsraum mit den Zuständen  $x_1, \dots, x_4$  und dem Bilden der notwendigen Lie-Ableitungen folgt

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 & \dot{x}_2 & \dot{x}_3 & \dot{x}_4 \end{bmatrix}^T &= \begin{bmatrix} x_2 & -\frac{bx_3+b^2x_2x_4}{m} & 0 & 0 \end{bmatrix}^T = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}^T \\ L_f(x_2) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = -\frac{bx_3 + b^2x_2x_4}{m} \\ L_f^2(x_2) &= \begin{bmatrix} 0 & -\frac{b^2x_4}{m} & -\frac{bx_3}{m} & -\frac{b^2x_2}{m} \end{bmatrix} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \frac{b^3}{m^2}(x_3x_4 + bx_2x_4^2) \\ \Rightarrow \frac{\partial L_f(x_2)}{\partial \mathbf{x}^T} &= \begin{bmatrix} 0 & \frac{b^2x_4}{m} & \frac{b}{m} & \frac{b^2x_2}{m} \end{bmatrix} \quad \frac{\partial L_f^2(x_2)}{\partial \mathbf{x}^T} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{b^4x_4^2}{m^2} & \frac{b^3x_4}{m^2} & \frac{b^3x_3+2b^4x_2x_4}{m^2} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Dies entspricht der vereinfachten Betrachtung. Der volle Rang wird nur erreicht, wenn zusätzlich zur Geschwindigkeit einer der Zustände  $x_3, x_4$  von Null verschieden ist. Es zeigt sich in diesem Beispiel aber auch, dass die Rangbedingung nur eine hinreichende Forderung ist, da die Invertierung der Beobachtbarkeitsabbildung des Systems gelingt

$$\begin{aligned} \mathbf{q} &= \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & L_f(y_2) & L_f^2(y_2) \end{bmatrix} \quad x_1 = q_1, x_2 = q_2 \\ q_3 &= -\frac{bx_3 + b^2x_2x_4}{m} & \Leftrightarrow q_4 = \frac{b^2}{m}(-q_3)x_4 & \Leftrightarrow x_4 = -\frac{mq_4}{b^2q_3} \\ q_4 &= \frac{b^2}{m} \left( \frac{bx_3 + b^2x_2x_4}{m} \right) x_4 & & x_3 = -\frac{mq_3}{b} + \frac{bx_2q_4}{bq_3}. \end{aligned}$$

Die Zustandsgrößen lassen sich also auch für Werte von Null bestimmen. Ablesen lässt sich weiterhin, dass gelten muss  $q_3 \neq 0$ . Das heißt für konstante Geschwindigkeiten funktioniert die Invertierung nicht. Anschaulich lassen sich dann die geschwindigkeitsproportionale und die Coulombsche Reibung nicht mehr trennen.  $\square$

## 4.2.2 Beobachtbarkeit des vollständigen Systems

Eine Aussage über die Beobachtbarkeit des vollständigen Systems, ohne Einschränkungen an Massen-, Jakobi- und Coriolismatrix erfolgt an Hand der Beobachtbarkeitsabbildung Satz 1.

Der Ansatz im Fall konstanter Matrizen lässt sich transferieren. Die Analyse der zweifachen Lie-Ableitung Gleichung (4.21) zeigt, dass auch in diesem Fall der entsprechende Parameter  $\mathbf{x}_D$  linear auftritt. Die Bestimmung der Beobachtbarkeitsabbildung erfolgt mit dem Operator nach Gleichung (4.24) anstelle der Lie-Ableitung. Die sich ergebenden Änderungen sind auf Grund der Struktur des Systems jedoch minimal

$$\mathbf{N}_{\mathbf{f}_x} \mathbf{h}_x = \mathbf{L}_{\mathbf{f}_x} \mathbf{h}_x + \mathbf{M}_q^{-1} \boldsymbol{\tau}_d, \quad \mathbf{N}_{\mathbf{f}_x}^2 \mathbf{h}_x = \mathbf{L}_{\mathbf{f}_x}^2 \mathbf{h}_x + \frac{\partial \mathbf{M}_q^{-1}}{\partial \mathbf{x}_A^T} (\mathbf{I}_{n_{dof}} \otimes \boldsymbol{\tau}_d) + \mathbf{M}_q^{-1} \dot{\boldsymbol{\tau}}_d.$$

Nach Umstellen der ersten Lie-Ableitung zur Substitution der Größe  $\mathbf{x}_C$  und deren Einsetzen ergibt sich

$$\mathbf{M}_q^{-1} {}^\sigma \mathbf{J}_q^T \text{diag}(\mathbf{x}_D) \frac{\partial {}^\sigma \mathbf{J}_q}{\partial \mathbf{x}_A^T} (\mathbf{I}_{n_{dof}} \otimes \mathbf{x}_B) \mathbf{x}_B + \dots$$

$$\mathbf{M}_q^{-1} {}^\sigma \mathbf{J}_q^T \text{diag}(\mathbf{x}_D) {}^\sigma \mathbf{J}_q \mathbf{q}_C = \mathbf{v}(\mathbf{q}, \boldsymbol{\tau}_d, \dot{\boldsymbol{\tau}}_d), \quad (4.25)$$

wobei in  $\mathbf{v}(\mathbf{q})$  die von Zustand  $\mathbf{x}_D$  unabhängigen Terme zusammengefasst sind.

Da die Systemmatrizen nur von den Zuständen  $\mathbf{x}_A, \mathbf{x}_B$  abhängig und diese identisch mit den Teilen  $\mathbf{q}_A, \mathbf{q}_B$  der Beobachtbarkeitsabbildung sind, lassen sich sämtliche Zustände aus der Gleichung eliminieren. Damit lassen sich die Zustände  $\mathbf{x}_D$  wie folgt ersetzen

$$\text{diag}(\mathbf{x}_D) \frac{\partial {}^\sigma \mathbf{J}_q}{\partial \mathbf{x}_A^T} (\mathbf{I}_{n_{dof}} \otimes \mathbf{x}_B) \mathbf{x}_B + \text{diag}(\mathbf{x}_D) {}^\sigma \mathbf{J}_q \mathbf{q}_C = {}^\sigma \mathbf{J}_q^{-T} \mathbf{M}_q \mathbf{v}(\mathbf{q}, \boldsymbol{\tau}_d, \dot{\boldsymbol{\tau}}_d)$$

$$\Leftrightarrow \text{diag} \left( \underbrace{\frac{\partial {}^\sigma \mathbf{J}_q}{\partial \mathbf{x}_A^T} (\mathbf{I}_{n_{dof}} \otimes \mathbf{x}_B) \mathbf{x}_B + {}^\sigma \mathbf{J}_q \mathbf{q}_C}_{\mathbf{t}} \right) \mathbf{x}_D = {}^\sigma \mathbf{J}_q^{-T} \mathbf{M}_q \mathbf{v}(\mathbf{q}, \boldsymbol{\tau}_d, \dot{\boldsymbol{\tau}}_d).$$

Die eindeutige Lösung des Gleichungssystems gelingt genau dann wenn die Matrix  $\text{diag}(\mathbf{t})$  nicht singulär ist, d. h. alle Komponenten des Vektors  $\mathbf{t}$  von Null verschieden sind. Dieser entspricht den Beschleunigungen des Systems in den betrachteten Gelenken. Die Transformation der Beschleunigung ergibt sich aus der Beziehung

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = {}^\sigma \mathbf{J}_q \dot{\mathbf{q}} \Rightarrow \ddot{\boldsymbol{\sigma}} = {}^\sigma \dot{\mathbf{J}}_q \dot{\mathbf{q}} + {}^\sigma \mathbf{J}_q \ddot{\mathbf{q}}.$$

Da  $\mathbf{q}_C$  die Zeitableitung der Geschwindigkeit in den generalisierten Koordinaten  $\mathbf{x}_B$  ist, entspricht der oben definierte Vektor  $\mathbf{t}$  den Beschleunigungen in den reibbehafteten Koordinaten. Die Invertierung des Gleichungssystems und damit der Beobachtbarkeitsabbildung erfordert daher, dass keine der transformierten Beschleunigungen Null ist. In diesem Fall lassen sich die beiden Reibarten nicht unterscheiden. Damit ergibt sich keine weitere Einschränkung zum vereinfachten Fall, die Beobachtbarkeit des Systems ist daher in allen anderen Fällen sichergestellt. Ausgenommen sind die Bereiche von  $\mathcal{M}$ , die eine der folgenden Bedingungen

erfüllen:

1. Die Jakobimatrix  $\sigma \mathbf{J}_q$  ist singulär. Dies korrespondiert mit singulären Posen bzgl. der Koordinaten der reibbehafteten Gelenke. Im regulären Betrieb kommen diese nicht bzw. nur in speziellen Situationen vor.
2. Eine der transformierten Geschwindigkeiten  $\sigma \mathbf{J}_q \mathbf{x}_B$  ist Null. In diesem Fall ist die Reibkraft in der entsprechenden Komponente nach Gleichung (3.11) ohnehin nicht eindeutig definiert. Die Systemordnung reduziert sich dann entsprechend, die anderen Komponenten sind nicht betroffen.
3. Konstante Geschwindigkeiten in den reibbehafteten Gelenken. Dies stellt vermutlich die größte Einschränkung dar. Dann ist zwar die Schätzung der momentanen Reibkraft im betreffenden Gelenk möglich, nicht aber die Aufteilung in Coulombsche und geschwindigkeitsproportionale Reibung. Da sich der Roboter aber nicht mit konstanter Geschwindigkeit im regulären Betrieb bewegt, sind dies nur vereinzelte Bereiche in denen die Unterscheidung nicht gelingt.

Es ist zu beachten, dass die letzte der oben aufgeführten Einschränkungen aus der Forderung der Beobachtung beider Reibparameter folgt. Kann eine der beiden Formen vernachlässigt werden, erweitert sich der beobachtbare Bereich entsprechend.

### 4.2.3 Beobachtbarkeit im Falle mehrerer Gelenkfreiheitsgrade

Die bisherigen Betrachtungen behandeln die Fälle, bei denen eine Inversion der Jakobimatrix ohne Informationsverlust möglich ist. Damit ist die Anzahl der möglichen zu beobachtenden Gelenke auf die Anzahl der Roboterfreiheitsgrade  $n_{dof}$  beschränkt. Steigt die Anzahl der zu beobachtenden Gelenke an, so sind mehr Ableitungen notwendig um die Beobachtbarkeitsabbildung aufzustellen bzw. die Rangbedingung zu überprüfen. Um die Symmetrie des Systems aufrecht zu erhalten, erfolgt die Zusammenfassung der aus den Reibmomenten folgenden Zustandsgrößen in Vektoren der Dimension  $n_{dof}$

$$\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{M}_q^{-1} \left( -(\mathbf{C}_q \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}_q) + \sum_{i=1}^m \sigma_i \mathbf{J}_q^T \boldsymbol{\sigma}_i \right) = \mathbf{M}_q^{-1} \left( -\boldsymbol{\xi} + \sum_{i=1}^m \sigma_i \mathbf{J}_q^T \boldsymbol{\sigma}_i \right).$$

In der obigen Gleichung sind zunächst nur die Coulombschen Kräfte berücksichtigt. Grundbedingung zur Detektion der einzelnen Komponenten ist die lineare Unabhängigkeit aller Zeilenvektoren der Jakobimatrizen  $\sigma_i \mathbf{J}_q^T$ . Ist dies nicht der Fall, so sind die Reibmomente nicht mehr eindeutig zuordnenbar. Die Beobachtbarkeitsabbildung lautet dann in diesem



Fall

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} \mathbf{h}_x^T & (\mathbf{L}_{f_x} \mathbf{h}_x)^T & \dots & (\mathbf{L}_{f_x}^m \mathbf{h}_x)^T \end{bmatrix}^T. \quad (4.26)$$

Um die Beobachtbarkeitsabbildung geschlossen formulieren zu können, werden die Lie-Ableitungen im folgenden als totales Differential nach der Zeit interpretiert. Damit lauten die Komponenten der Vorschrift

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_1 \\ \mathbf{q}_2 \\ \mathbf{q}_3 \\ \vdots \\ \mathbf{q}_{m+2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{h}_{x,A} \\ \mathbf{h}_{x,B} \\ \frac{d}{dt} \mathbf{h}_{x,B} \\ \vdots \\ \frac{d^m}{dt^m} \mathbf{h}_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_A \\ \mathbf{x}_B \\ M_q^{-1} \sum_{i=1}^m (\sigma_i \mathbf{J}_q^T \sigma_i) + M_q^{-1} \boldsymbol{\xi} \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^m \left( \binom{m}{j} \frac{d^{m-j}}{dt^{m-j}} M_q \sum_{i=1}^m \left( \frac{d^j}{dt^j} \sigma_i \mathbf{J}_q^T \sigma_i \right) \right) + \frac{d^m}{dt^m} M_q^{-1} \boldsymbol{\xi} \end{bmatrix}. \quad (4.27)$$

Das System ist dann beobachtbar, wenn die Abbildung nach Gleichung (4.27) eine eindeutige Umkehrung besitzt. Auf Grund der hohen Zeitableitungen in Gleichung (4.27) ergibt sich zusätzlich die Forderung nach hinreichend oft differenzierbaren Trajektorien. Da die Zustandsgrößen  $\mathbf{x}_A, \mathbf{x}_B$  ebenfalls direkt auf  $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2$  abgebildet werden, ist die Umkehrung trivial. Insbesondere erlaubt dies auch die Systemmatrizen in Abhängigkeit der Ausgangsabbildung zu bestimmen. Die Auflösung nach den durch das Reibmodell eingebrachten Größen erfolgt durch schrittweises isolieren und eliminieren der Parameter. Der Subvektor an der Position  $i + 2$  dient zur Bestimmung des Zustandsvektors  $\sigma_i$ . Bei der Auflösung der Gleichungen erweist sich die folgende rekursiv definierte Abbildung als hilfreich

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Xi} &: (1, \mathbf{T}_1) && \rightarrow \mathbf{T}_1 \\ &(n, \mathbf{T}_m) && \rightarrow \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} \mathbf{T}_m - \sum_{k=1}^{n-1} \left( \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} \mathbf{T}_k \boldsymbol{\Xi}^{-1}(k, \mathbf{T}_k) \boldsymbol{\Xi}(k, \mathbf{T}_m) \right) \\ &(\mathbb{N}, \mathbb{R}^{n_{dof} \times n_{dof}}) && \mapsto \mathbb{R}^{n_{dof} \times n_{dof}} \\ &n \in \{1, \dots, m\} && \mathbf{T}_j \in \{\sigma_1 \mathbf{J}_q^T, \dots, \sigma_m \mathbf{J}_q^T\}. \end{aligned} \quad (4.28)$$

Die Umkehrung der Beobachtbarkeitsabbildung nach Gleichung (4.27) ist genau dann möglich, wenn alle Matrizen der Menge  $\{\boldsymbol{\Xi}(1, \sigma_1 \mathbf{J}_q^T), \dots, \boldsymbol{\Xi}(m, \sigma_m \mathbf{J}_q^T)\}$  existieren und nicht singular sind. Sämtliche Rechnungen sind hier unter Einbeziehung der zeitlichen Ableitung der Matrizen erfolgt. Diese sind im Allgemeinen jedoch meist in Abhängigkeit der Systemgrößen gegeben, um eine zustandsabhängige Darstellung zu erhalten. Die Ableitung nach der Zeit muss dann mittels partieller Ableitungen über die Kettenregel bestimmt werden, also als Lie-Ableitung. Diese Verkettung erzeugt Polynome höherer Ordnung in den Zustandsgrößen, die

eine globale Invertierbarkeit der Abbildung verhindern würden

$$\frac{d^2 M_q}{dt^2} \left( \sum_{i=1}^m \sigma_i \mathbf{J}_q^T \sigma_i \right) = \left( \frac{\partial^2 M_q}{\partial \mathbf{x}_A^T{}^2} \left( \mathbf{x}_B \otimes \mathbf{I}_{n_{dof}^2} \right) \left( \mathbf{x}_B \otimes \mathbf{I}_{n_{dof}} \right) + \frac{\partial M_q}{\partial \mathbf{x}_A^T} \left( \mathbf{f}_x \otimes \mathbf{I}_{n_{dof}} \right) \right) \sum_{i=1}^m \sigma_i \mathbf{J}_q^T \sigma_i.$$

Die Ableitungsreihenfolge kann jedoch mit Hinblick auf die angestrebte Invertierung auch in Abhängigkeit voriger Subvektoren der Beobachtbarkeitsabbildung beschrieben werden, so dass die zu eliminierenden Parameter nur linear auftauchen

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_2 &= \mathbf{x}_B & \mathbf{q}_3 &= \mathbf{M}_q^{-1} \sum_{i=1}^m (\sigma_i \mathbf{J}_q^T \sigma_i) + \mathbf{M}_q^{-1} \boldsymbol{\xi} \\ \mathbf{q}_{i+1} &= \mathbf{L}_{\mathbf{f}_x} \mathbf{q}_i = \frac{\partial \mathbf{q}_i}{\partial \mathbf{x}_A^T} \mathbf{q}_2 + \frac{\partial \mathbf{q}_i}{\partial \mathbf{x}_B^T} \mathbf{q}_3. \end{aligned} \quad (4.29)$$

Die Parameter  $\mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3$  in Gleichung (4.29) brauchen für die Umkehrabbildung nicht aufgelöst werden, so dass im Falle linearer Parameter  $\sigma_i$  im Subvektor  $\mathbf{q}_i$  diese Linearität auch im Subvektor  $\mathbf{q}_{i+1}$  erhalten bleibt. Die rekursive Formulierung zeigt, dass die Systemgrößen, zusammengefasst im Vektor  $\boldsymbol{\xi}$ , die Invertierbarkeit nicht gefährden.

Durch Hinzunahme der geschwindigkeitsproportionalen Reibung steigen die benötigten Zeitableitungen zur Aufstellung der Beobachtbarkeitsabbildung weiter an. Das komplette System inklusive Eingangsgröße lautet dann

$$\begin{aligned} \frac{d \mathbf{x}_B}{dt} &= \mathbf{M}_q^{-1} \sum_{i=1}^m (\sigma_i \mathbf{J}_q^T \text{diag}(\sigma_{v,i}) \sigma_i \mathbf{J}_q) \mathbf{x}_B + \\ &\quad \mathbf{M}_q^{-1} \sum_{i=1}^m (\sigma_i \mathbf{J}_q^T \sigma_{c,i}) + \mathbf{M}_q^{-1} \boldsymbol{\tau}_d - \mathbf{M}_q^{-1} \boldsymbol{\xi}. \end{aligned} \quad (4.30)$$

Die wiederholte Ableitung des Systems, die die Komponenten zur Beobachtbarkeitsabbildung liefern, kann wie in Gleichung (4.29) rekursiv definiert werden, so dass sich auch hier ein lineares Gleichungssystem in den unbekannten  $\sigma_{c,i}, \sigma_{v,i}$  ergibt. Der Eingangsgröße kommt eine Sonderrolle zu, da ihre Zeitableitung naturgemäß nicht über die Zustände beschrieben werden kann. Die Startwerte für die Rekursion  $\mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3$  sind definiert wie in Gleichung (4.29)

$$\mathbf{q}_2 = \mathbf{x}_B \quad \mathbf{q}_3 = \frac{d \mathbf{x}_B}{dt} \quad (4.31)$$

$$\mathbf{q}_{i+1} = \mathbf{L}_{\mathbf{f}_x} \mathbf{q}_i = \frac{\partial \mathbf{q}_i}{\partial \mathbf{x}_A^T} \mathbf{q}_2 + \frac{\partial \mathbf{q}_i}{\partial \mathbf{x}_B^T} \mathbf{q}_3 + \sum_{j=0}^{i-1} \frac{\partial \mathbf{q}_i}{\partial \boldsymbol{\tau}_d^{(j)T}} \boldsymbol{\tau}_d^{(j+1)} \quad \text{mit } \boldsymbol{\tau}_d^{(n)} = \frac{d^n \boldsymbol{\tau}_d}{dt^n}, \quad (4.32)$$

womit die Linearität bezüglich der Zustände  $\sigma_{c,i}, \sigma_{v,i}$  gewahrt wird. Die Forderungen an die

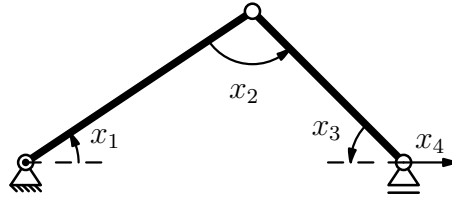


Abbildung 4.2: Manipulator mit einem Freiheitsgrad

Invertierbarkeit der Matrizen ist dann entsprechend umfangreicher.

**Beispiel 2** Gegeben ist eine parallele Mechanik nach Abbildung 4.2. In der dargestellten Konfiguration  $\frac{\pi}{2} < x_2 < \pi$  lassen sich die Größen  $x_i$  beschreiben über die impliziten Funktionen

$$\begin{aligned} f_3 &= l_1 \sin(x_1) - l_2 \sin(x_3) = 0 & x_3 &= \arcsin(h(x_1)) \\ f_2 &= \pi - x_1 - x_2 - x_3 = 0 & x_2 &= \pi - x_1 - \arcsin(h(x_1)) \\ f_4 &= x_4 - l_1 \cos(x_1) - l_2 \cos(x_3) = 0 & x_4 &= l_1 \cos(x_1) + l_2 \sqrt{1 - h^2(x_1)} \\ & & h(x_1) &= l_1 l_2^{-1} \sin(x_1), \end{aligned}$$

und den entsprechenden Jakobimatrizen, die in diesem Fall die Dimension 1 besitzen

$$\begin{aligned} j_2 &= -\frac{l_1 \cos(x_1) + l_2 \sqrt{1 - h^2(x_1)}}{l_2 \sqrt{1 - h^2(x_1)}} & j_3 &= \frac{l_1 \cos(x_1)}{l_2 \sqrt{1 - h^2(x_1)}} \\ j_4 &= -\frac{\sin(x_1) \sqrt{1 - h^2(x_1)} + \cos(x_1) h(x_1)}{\sqrt{1 - h^2(x_1)}}. \end{aligned}$$

In Verbindung mit den in den Gelenken induzierten Reibkräften und -momenten folgt die Darstellung im Zustandsraum.

$$\dot{z}_1 = z_2, \quad \dot{z}_2 = \theta_1^{-1} \left( \sum_{i=1}^3 j_i z_{i+2} + \sum_{i=1}^3 j_i z_{i+5} j_i z_2 - z_2 + u \right), \quad \dot{z}_3 = 0, \quad \dots, \quad \dot{z}_8 = 0$$

Die Hinzunahme des ersten Gelenks erzeugt dabei ein linear abhängiges System von Jakobimatrizen:  $\mathbf{I}_1 + j_3 = j_2$ . Dieser Zusammenhang ist auch an Hand der Funktion  $f_2$  ablesbar.

Bei Betrachtung des reduzierten Systems, ohne die geschwindigkeitsproportionalen Reibanteile  $z_6, \dots, z_8$ , ergeben sich die Komponenten der Beobachtbarkeitsabbildung zu

$$\begin{aligned} q_1 &= z_1 & q_2 &= z_2 \\ q_3 &= \theta_1^{-1} \left( \sum_{i=1}^3 j_i z_{i+2} - z_2 + u \right) & q_4 &= \theta_1^{-1} \left( \sum_{i=1}^3 \frac{\partial j_i}{\partial z_1} q_2 z_{i+2} \right) - \theta_1^{-1} q_3 + \theta_1^{-1} \dot{u} \\ q_5 &= \theta_1^{-1} \left( \sum_{i=1}^3 \left( \frac{\partial^2 j_i}{\partial z_1^2} q_2 q_2 z_{i+2} \right) \right) + \theta_1^{-1} \left( \sum_{i=1}^3 \left( \frac{\partial j_i}{\partial z_1} q_3 q_2 z_{i+2} \right) \right) - \theta_1^{-1} q_4 + \theta_1^{-1} \ddot{u}. \end{aligned}$$

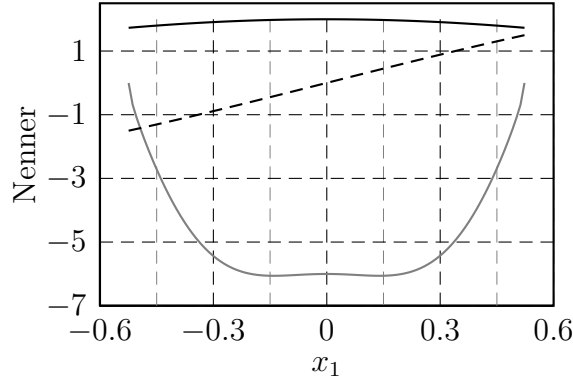


Abbildung 4.3: Nennerterme bei Inversion der Beobachtbarkeitsabbildung. Die gewählten geometrischen Abmessungen betragen  $l_1 = 2 \text{ m}$ ,  $l_2 = 1 \text{ m}$ , so dass die Singularität  $x_3 = \pi/2$  an der Arbeitsraumgrenze  $x_1 = \pm\pi/3$  liegt.

Die Gleichungen bilden ein lineares Gleichungssystem in  $\mathbf{z}$ . Dessen Lösung erfolgt durch schrittweises eliminieren der Variablen

$$\begin{aligned}
 z_3 &= j_1^{-1} (\theta_1 q_3 + q_2 - j_2 z_4 - j_3 z_5 - u) \\
 z_4 &= (j_2' q_2 - j_1' q_2 j_1^{-1} j_2)^{-1} (\theta_1 q_4 + (1 - j_1' q_2 j_1^{-1} \theta_1) q_4 - j_1' q_2 j_1^{-1} q_2 + \\
 &\quad (j_1' q_2 j_1^{-1} j_3 - j_3' q_2) z_5 + \dot{u} + j_1' q_2 j_1^{-1} u) \\
 z_5 &= k_5^{-1} (\theta_1 q_5 + k_1 q_1 + k_2 q_2 + k_3 q_3 + k_4 q_4 + k_6 u + k_7 \dot{u} + k_8 \ddot{u}), \\
 \text{mit } k_5 &= (j_2'' q_2 q_2 + j_2' q_3 q_2 - j_1'' q_2 q_2 j_1^{-1} j_2 - j_1' q_3 q_2 j_1^{-1} j_2) (j_2' q_2 - j_1' q_2 j_1^{-1} j_2)^{-1} \cdot \dots \\
 &\quad (j_1' q_2 j_1^{-1} j_3 - j_3' q_2) + (j_3'' q_2 q_2 + j_3' q_3 q_2 - j_1'' q_2 q_2 j_1^{-1} j_3 - j_1' q_3 q_2 j_1^{-1} j_3)
 \end{aligned}$$

Die Bedingung zur Lösbarkeit des Gleichungssystems bezieht bei der dritten Zeitableitung der Ausgangsgröße die vorigen Ableitungen mit ein. Gilt  $q_2 = 0$  so ist  $k_5 = 0$  und die Beobachtbarkeitsabbildung nicht invertierbar. Die Invertierbarkeit des Beispielsystems ist abseits der singulären Stellungen gegeben. Dabei sind Singularitäten des direkten und inversen kinematischen Problems relevant. In Abbildung 4.3 ist der Wert der Nennerterme für die angegebenen Längenkonstellationen dargestellt. Weiterhin ist anzumerken, dass sich Vereinfachungen daraus ergeben, dass das hier dargestellte Beispiel ein skalarer Fall ist. Die Multiplikation ist in diesem Fall kommutativ. Die sich daraus ergebenden Vereinfachungen sind jedoch nicht auf den vektoriellen Fall übertragbar, daher sind diese in den Gleichungen nicht ausgeführt.  $\square$

Generell ist die Beobachtbarkeit in mehr Gelenken als Freiheitsgraden möglich. Die Invertierung der Abbildung unterliegt jedoch einer wachsenden Anzahl von Bedingungen, die erfüllt sein müssen. Die beobachtbare Untermenge der Systemmannigfaltigkeit  $\mathcal{M}$  schrumpft nach Satz 2 zusammen. Wesentlich ist auch, dass zunehmend Ableitungen der Eingangsgröße

auftauchen und damit ein steigender Anspruch an die Glattheit der Trajektorien gestellt wird. An den Schaltstellen ruckbegrenzter zeitoptimaler Trajektorien ist beispielsweise die Ableitung der Eingangsgröße nicht mehr definiert. Die Beobachtbarkeit ist nicht mehr allein durch das System beschränkt, sondern auch durch die Anregung.

### 4.3 Beobachter mit hohen Verstärkungen

Die Ausführungen in Abschnitt 4.2 zeigen, dass das in Gleichung (4.7) beschriebene System prinzipiell beobachtbar ist. Je nach Anzahl der zu beobachtenden Reibmomente ist der beobachtbare Teilraum mehr oder weniger eingeschränkt. Da zum Nachweis der Beobachtbarkeit bereits die Lie-Ableitungen bzw. für gesteuerte Systeme die entsprechende Erweiterung nach Gleichung (4.24) vorliegen, liegt der Entwurf eines Beobachters basierend auf hohen Verstärkungen, siehe z. B. [13], nahe. Der Entwurf basiert dabei auf der Transformation des Systems in die Beobachtbarkeitsnormalform. Diese ist charakterisiert durch die folgende Struktur.

**Definition 4 (Nichtlineare Beobachtbarkeitsnormalform (NBKNF), [13])** Die allgemeine Beobachtbarkeitsnormalform für Systeme mit einer Ausgangsgröße besteht aus einer Serienschaltung von Integratoren mit nichtlinearer Rückführung. Die Eingangsgrößen haben eine Dreiecksstruktur [44]

$$\dot{\mathbf{z}} = \begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \vdots \\ \dot{z}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_2 \\ \vdots \\ z_n \\ a(\mathbf{z}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{g}_1^T(z_1) \\ \mathbf{g}_2^T(z_1, z_2) \\ \vdots \\ \mathbf{g}_n^T(z_1, \dots, z_n) \end{bmatrix} \mathbf{u}, \quad y = h(\mathbf{z}) = z_1.$$

Die Erweiterung der Normalform auf Systeme mit vektorwertiger Ausgangsabbildung erfolgt über die Definition von Untersystemen, die die obige Struktur aufweisen. Ausgangsgrößen sind die entsprechenden Elemente der Teilsysteme. Die Teilsysteme müssen nicht notwendiger Weise gleiche Ordnung besitzen. Die Bedingung für die Form der Ausgangsgrößen ist aufgeweicht, die Dreiecksstruktur der Zustände in der Ausgangsmatrix ist im Falle vektorwertiger Ausgänge nicht mehr zwingend.  $\square$

Die Transformation von eingangslinearen Systemen auf die in Definition 4 beschriebene Form ist in der Literatur angegeben, siehe [44],

$${}^{bk}\mathbf{x}^T = \begin{bmatrix} h_{x,1} & \dots & L_{\mathbf{f}_x}^{m_1} h_{x,1} & \dots & h_{x,p} & \dots & L_{\mathbf{f}_x}^{m_p} h_{x,p} \end{bmatrix} = {}^{bk}\mathbf{w}_{zrd}. \quad (4.33)$$

Unter Ausnutzung der Symmetrie der vorliegenden Systemklasse, sind die einzelnen Ordnungen der Ableitungen gleich  $m_1 = m_2 = \dots = m_p$ . Daher kann das Bilden der Transfor-

mationsvorschrift vektoriell erfolgen, lediglich die Sortierung der Zustandsgrößen ist dann verschieden. Die beschreibende Differentialgleichung lautet dann

$$\frac{\partial^{bk}\mathbf{x}}{\partial t} = \frac{\partial^{bk}\mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}^T} \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \frac{\partial^{bk}\mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}^T} (\mathbf{f}_x + \mathbf{G}_x \mathbf{u}) \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{b}^k \mathbf{w}_{\text{zrd}}^{-1}} = \mathbf{A}^{bk} \mathbf{x} + \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{b}^k \mathbf{x}, \mathbf{u}). \quad (4.34)$$

Die in Gleichung (4.33) angegebene Transformation ist auch bei nicht beobachtbaren Systemen möglich. Der Wechsel der beschreibenden Koordinaten ist nur sinnvoll, wenn er ohne Informationsverlust möglich ist, also umkehrbar ist. Dass die gewünschten Integratorketten dadurch erreicht werden, lässt sich aus Gleichung (4.34) ablesen

$$\frac{\partial^{bk}x_{i+1}}{\partial t} = \underbrace{\frac{\partial^{bk}x_{i+1}}{\partial \mathbf{x}^T} \mathbf{f}_x}_{\text{Lie-Ableitung}} + \underbrace{\frac{\partial^{bk}x_{i+1}}{\partial \mathbf{x}^T} \mathbf{G}_x \mathbf{u}}_{\text{Steuerung}} = L_{\mathbf{f}_x}(\mathbf{b}^k x_{i+1}) + \frac{\partial^{bk}x_{i+1}}{\partial \mathbf{x}^T} \mathbf{G}_x \mathbf{u}. \quad (4.35)$$

Die Lie-Ableitung entspricht dem nachfolgenden Zustand. Die zum Aufstellen der Abbildung  $\mathbf{b}^k \mathbf{w}_{\text{zrd}}$  notwendigen Ableitungen liegen durch die Untersuchung der Beobachtbarkeit vor, so dass nun der Beobachter in den neuen Koordinaten angegeben werden kann

$$\frac{\partial^{bk}\hat{\mathbf{x}}}{\partial t} = \mathbf{A}^{bk} \hat{\mathbf{x}} + \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{b}^k \hat{\mathbf{x}}, \mathbf{u}) + \mathbf{K}(\mathbf{y} - \mathbf{h}(\mathbf{b}^k \hat{\mathbf{x}})). \quad (4.36)$$

Die Elemente der Matrix  $\mathbf{K}$  sind dabei derart gewählt, dass alle Eigenwerte der Matrix  $\mathbf{A} - \mathbf{K}$  einen negativen Realteil besitzen, siehe [45]. Die Fehlerdynamik ist genau dann linear, wenn die nichtlineare Funktion  $\boldsymbol{\varphi}$  genau kompensiert wird. Da dies nicht der Fall ist, werden die Elemente der Matrix  $\mathbf{K}$  derart verzerrt, dass die Stabilität durch die Funktion  $\boldsymbol{\varphi}$  nicht gefährdet ist. Daher muss diese Funktion über  $\mathcal{M}$  bzw. dem beobachtbaren Bereich beschränkt sein. Beim vorliegenden System ergibt sich die Vorschrift in der Art, dass

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{k}_1 & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \ddots & & \mathbf{0} \\ \vdots & & \ddots & \\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{k}_p \end{bmatrix}, \quad \mathbf{k}_i = \begin{bmatrix} \frac{s_{i,m-1}}{\varepsilon^m} \\ \vdots \\ \frac{s_{i,0}}{\varepsilon} \end{bmatrix}, \quad (4.37)$$

wobei der Realteil der Nullstellen des Polynoms  $p_i(x) = \sum_{j=0}^{m-1} s_{i,j} x^j$  negativ und  $\varepsilon$  hinreichend klein zu wählen ist, um die Stabilität in Gegenwart der nichtlinearen Funktion  $\boldsymbol{\varphi}$  zu garantieren. Bei der vorliegenden Systemklasse besitzen die Teilsysteme konstante Ordnung, der Teilgrad der Systeme ist  $m = 4$ . Die Existenz des Beobachters ist nicht an die Messbarkeit der Geschwindigkeitssignale gekoppelt. Liegen diese vor, so können die Positionsdaten abgespalten werden und die Ordnung der verbliebenen Teilsysteme reduziert sich

auf  $m = 3$ . Der Vorteil dieses Beobachters ist, dass er kaum Einschränkungen für den Entwurf unterliegt. Für die beobachtbare Untermannigfaltigkeit folgt der Diffeomorphismus aus der Untersuchung der Beobachtbarkeit. Lediglich der Einfluss der isolierten Nichtlinearität muss abgeschätzt werden, um Stabilität im Rahmen der Störungstheorie zu garantieren.

## 4.4 Normalformbeobachter

Der in Abschnitt 4.3 vorgestellte Ansatz zur Detektion der Reibmomente weist den Nachteil auf, dass er das Modell des Systems nur unzureichend berücksichtigt. Die Stabilität ist im entscheidenden Maße von der Kompensation der unberücksichtigten Nichtlinearität durch die hohen Verstärkungen abhängig. Durch die Potenzierung erreichen die einzusetzenden Verstärkungen schnell große Werte, so dass verrauschte Signale problematisch sein können. Dennoch weisen Beobachter mit hohen Verstärkungen dann eine Fehlerdynamik auf, die zumindest den festgelegten Parametern in den Polynomen entspricht. Das Konvergenzverhalten beruht auf linearen Systemen und ist daher exponentiell.

Eine weiteres Verfahren zum Entwurf nichtlinearer Beobachter mit exponentieller Fehlerdynamik basiert ebenfalls auf der Transformation des Systems. Ziel ist es das System so abzubilden, dass die nichtlinearen Funktionen ausschließlich von den messbaren Größen abhängen. Dann ist die Kompensation dieser Funktion möglich und es kann ein lineares Fehlermodell angesetzt werden. Da der Entwurf an die Existenz einer Normalform gebunden ist, wird im Folgenden als *Normalformbeobachter* darauf referenziert. Zwar liegt auch der Ansatz aus Abschnitt 4.3 die Transformation des Systems auf eine Normalform zu Grunde, dennoch ist die Bezeichnung hier, analog zu [13] gewählt.

**Definition 5 (Nichtlineare Beobachternormalform (NBNF), [44])** Die nichtlineare Beobachternormalform für Systeme mit einem Ausgang besteht aus einem linearen Anteil und einer additiven nichtlinearen Funktion, der jedoch ausschließlich von den Ausgangsgrößen des Systems abhängt.

$$\dot{\mathbf{z}} = \begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \vdots \\ \dot{z}_n \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{o}^T & 0 \\ \mathbf{I}_{n-1} & \mathbf{o} \end{bmatrix}}_{\mathbf{E}_n} \cdot \begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varphi_1(z_n) \\ \vdots \\ \varphi_n(z_n) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{g}_1^T(z_n) \\ \vdots \\ \mathbf{g}_n^T(z_n) \end{bmatrix} \mathbf{u}, \quad y = h(\mathbf{z}) = z_n$$

Die Erweiterung auf Systeme mit vektorwertigem Ausgang erfolgt über die Stapelung obiger Systeme, wobei die Nichtlinearität und die Eingangsmatrix jeweils alle Systemausgänge in jedem Element enthalten dürfen.  $\square$

Liegt ein nichtlineares System in der in Definition 5 angegebenen Form vor, so ist der Entwurf des zugehörigen Zustandsbeobachters leicht durchführbar. Die Beobachtergleichung

lautet dann in vektorieller Form

$$\dot{\hat{\mathbf{z}}} = \mathbf{E}_n \cdot \hat{\mathbf{z}} + \boldsymbol{\varphi}(y) + \mathbf{G} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{k} \cdot (y - \hat{z}_n), \quad (4.38)$$

mit entsprechend gewähltem Vektor  $\mathbf{k}$ . Der Entwurf ist damit sehr ähnlich zu der in Abschnitt 4.3 vorgestellten Variante. Der wesentliche Unterschied besteht darin, dass die Nichtlinearität nur vom Systemausgang und nicht von den inneren Zuständen abhängt. Daher ist die Unsicherheit, die bei der Auslegung über die Beobachtbarkeitsnormalform die hohen Verstärkungen erforderte, nicht mehr vorhanden. Die geschätzten Zustände tauchen im nichtlinearen Systemteil nicht mehr auf, die Fehlerdynamik  $\mathbf{e} = \mathbf{z} - \hat{\mathbf{z}}$  ist linear.

Die Existenz der in Definition 5 angegebenen Form des Systems unterliegt jedoch weitaus strengeren Voraussetzungen als die zum Entwurf der Beobachter mit hohen Verstärkungen. Ist die Existenz der Form nachgewiesen, so ist die Bestimmung des Diffeomorphismus, der die Transformation gewährleistet, nicht sichergestellt. Eine einfache Vorschrift zur Konstruktion existiert nicht, das Finden der Abbildung erfordert das Lösen partieller Differentialgleichungen.

Zur Überprüfung der Existenz der Transformation bestehen zwei Ansätze. Da die Transformation das Lösen einer partiellen Differentialgleichung erfordert, muss die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung nachgewiesen werden. Dies kann mit Hilfe der Methoden der Differentialgeometrie erfolgen oder unter Analyse des Systems der partiellen Gleichungen selbst. Da auf Grund der Analysen in Abschnitt 4.2 bereits die Transformation auf die Beobachtbarkeitsnormalform vorliegt, erfolgt die Analyse an Hand der Differentialgleichungen. Dabei wird die Vorgehensweise aus [44] verwendet, die das Finden der Transformationsvorschrift vereinfacht, indem zunächst die Beobachtbarkeitsnormalform gebildet wird. Dieser Zwischenschritt ist, wie in [44] gezeigt, ohne Einschränkungen. In diesem Fall, bei eingangsaffinen Systemen, ergibt sich die Existenz der Normalform unmittelbar aus dem Nachweis der Beobachtbarkeit.

Der Diffeomorphismus auf die Beobachternormalform wird durch die Invertierung der Transformation von der Beobachter- zur Beobachtbarkeitsnormalform gewonnen. Die Konstruktion dieses Diffeomorphismus erfolgt wie in Gleichung (4.35). Da die Beobachternormalform noch unbekannt ist, sind nur die allgemeinen Strukturmerkmale dieser Form bekannt. Daraus ergibt sich ein System partieller Differentialgleichungen, dessen Lösung, sofern vorhanden, der gesuchte Diffeomorphismus ist

$${}^{bk}\mathbf{w}_{bnf} = \begin{bmatrix} L_{bnf\mathbf{f}_x}^0 {}^{bnf}h_{x,1} & \dots & L_{bnf\mathbf{f}_x}^{m_1} {}^{bnf}h_{x,1} & \dots \\ & & L_{bnf\mathbf{f}_x}^0 {}^{bnf}h_{x,p} & \dots & L_{bnf\mathbf{f}_x}^{m_p} {}^{bnf}h_{x,p} \end{bmatrix}^T, \quad (4.39)$$

wobei die Lie-Ableitungen in den Koordinaten der NBNF angegeben sind. Für das Gelingen



der Transformation nach [44] ist notwendig, dass die Eingangsmatrix des auf NBKNF transformierten Systems Diagonalstruktur bzgl. der Zustände aufweist. Diese Forderung konnte für den Entwurf in Abschnitt 4.2 fallen gelassen werden, hier ist sie jedoch für die Existenz der Lösung notwendig. Die Bestimmung der Lösung erfolgt erneut einzeln für die Teilsysteme. Die Komponenten  $\varphi_i, h$  der Repräsentation in NBNF bestimmen sich dann aus der partiellen Differentialgleichung

$$0 = L_{bk\mathbf{f}_x}^m c + \sum_{j=0}^{m-1} \left( L_{bk\mathbf{f}_x}^i \varphi_{j+1} \right), \quad \text{mit } c := {}^{bnf}h_{\mathbf{x}}^{-1}(y, u) = {}^{bnf}x_m. \quad (4.40)$$

Die skizzierte Transformation über den Zwischenschritt der NBKNF ist nicht die einzige Möglichkeit eine Systemtransformation zu finden. Bei der vorliegenden Systemstruktur ist das Verfahren jedoch am übersichtlichsten durchführbar und ist daher der direkten Transformation vorzuziehen. Da der Zwischenschritt keine Einschränkung darstellt, sondern immer möglich ist, wenn die Transformation existiert, können auch keine Lösungen unterschlagen werden.

#### 4.4.1 Anwendung des Normalformbeobachters zur Reibungsdetektion

Zur Anwendung des Normalformbeobachters auf das vorliegende System müssen zunächst die erwarteten Rahmendaten eingegrenzt werden. Die Anzahl der zu schätzenden Reibmomente wird erneut mit der Anzahl der Freiheitsgrade gleichgesetzt. Da die Beobachtbarkeitsnormalform als Zwischenschritt benötigt wird, und sich an dieser bereits eine notwendige Bedingung, die Diagonalstruktur, überprüfen lässt, wird diese als erste für das System bestimmt

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} {}^{zrd}\mathbf{x}_1 \\ {}^{zrd}\mathbf{x}_2 \\ {}^{zrd}\mathbf{x}_3 \\ {}^{zrd}\mathbf{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^{zrd}\mathbf{x}_2 \\ M_q^{-1} (\boldsymbol{\tau}_d - \boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\sigma} \mathbf{J}_q^T {}^{zrd}\mathbf{x}_3 + \boldsymbol{\sigma} \mathbf{J}_q^T \text{diag}({}^{zrd}\mathbf{x}_4) \boldsymbol{\sigma} \mathbf{J}_q {}^{zrd}\mathbf{x}_2) \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (4.41)$$

$${}^{bk}\mathbf{x} = {}^{bk}\mathbf{w}_{zrd}({}^{zrd}\mathbf{x}, \boldsymbol{\tau}_d). \quad (4.42)$$

Die Bestimmung der Differentialgleichung in NBKNF erfolgt nicht vollständig, es wird nur die Existenz der Diagonalform geprüft. Da in der letzten Zeile alle Zustände zulässig sind, vgl. Definition 4, wird die Differentialgleichung nur bis zur dritten (vektoriellen) Zeile untersucht.

Dazu wird zunächst die invertierte Ausgangsabbildung herangezogen

$$\begin{aligned}
{}^{zrd}\mathbf{x}_1 &= {}^{bk}\mathbf{x}_1 & {}^{zrd}\mathbf{x}_2 &= {}^{bk}\mathbf{x}_2 \\
{}^{bk}\mathbf{x}_3 &= \mathbf{M}_q^{-1} \left( -\boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\sigma} \mathbf{J}_q^T {}^{zrd}\mathbf{x}_3 + \boldsymbol{\sigma} \mathbf{J}_q^T \text{diag}({}^{zrd}\mathbf{x}_4) \boldsymbol{\sigma} \mathbf{J}_q {}^{zrd}\mathbf{x}_2 \right) \\
{}^{bk}\mathbf{x}_4 &= \left( \frac{\partial \mathbf{M}_q^{-1} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{J}_q^T {}^{zrd}\mathbf{x}_3}{\partial {}^{zrd}\mathbf{x}_1^T} + \frac{\partial \mathbf{M}_q^{-1} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{J}_q^T \text{diag}({}^{zrd}\mathbf{x}_4) \boldsymbol{\sigma} \mathbf{J}_q {}^{zrd}\mathbf{x}_2}{\partial {}^{zrd}\mathbf{x}_1^T} - \frac{\partial \mathbf{M}_q^{-1} \boldsymbol{\xi}}{\partial {}^{zrd}\mathbf{x}_1^T} \right) {}^{bk}\mathbf{x}_2 \\
&\quad + \left( \frac{\partial \mathbf{M}_q^{-1} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{J}_q^T {}^{zrd}\mathbf{x}_3}{\partial {}^{zrd}\mathbf{x}_2^T} + \mathbf{M}_q^{-1} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{J}_q^T \text{diag}({}^{zrd}\mathbf{x}_4) \boldsymbol{\sigma} \mathbf{J}_q - \frac{\partial \mathbf{M}_q^{-1} \boldsymbol{\xi}}{\partial {}^{zrd}\mathbf{x}_2^T} \right) {}^{bk}\mathbf{x}_3 \\
\Rightarrow {}^{zrd}\mathbf{x}_4 &= \mathbf{v} \left( {}^{bk}\mathbf{x}_1, {}^{bk}\mathbf{x}_2, {}^{bk}\mathbf{x}_3, {}^{bk}\mathbf{x}_4 \right).
\end{aligned}$$

Diese Werte in Gleichung (4.34) eingesetzt ergibt

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} {}^{bk}\mathbf{x}_1 \\ {}^{bk}\mathbf{x}_2 \\ {}^{bk}\mathbf{x}_3 \\ {}^{bk}\mathbf{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^{bk}\mathbf{x}_2 \\ {}^{bk}\mathbf{x}_3 + \mathbf{M}_q^{-1} ({}^{bk}\mathbf{x}_1) \cdot \boldsymbol{\tau}_d \\ {}^{bk}\mathbf{x}_4 + \left( -\frac{\partial \mathbf{M}_q^{-1} \boldsymbol{\xi}}{\partial {}^{zrd}\mathbf{x}_2^T} + \mathbf{M}_q^{-1} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{J}_q^T \text{diag}({}^{zrd}\mathbf{x}_4) \boldsymbol{\sigma} \mathbf{J}_q \right) \mathbf{M}_q^{-1} ({}^{bk}\mathbf{x}_1) \\ * \end{bmatrix}$$

Damit liegt die geforderte Struktur der Eingangsmatrix nicht vor, da der Vektor  $\mathbf{v}$  von allen Zuständen abhängt. Die Transformation in NBNF wird daher nach [44] nicht gelingen. Wenn auf die geschwindigkeitsproportionale Reibung verzichtet wird, verkleinert sich der Zustandsraum entsprechend. Die geforderte Struktur bzgl. der Eingangsmatrix liegt in diesem Fall vor, so dass die notwendige Strukturbedingung erfüllt ist. Daher wird im folgenden ausschließlich die Coulombsche Reibung betrachtet.

Die zur Bestimmung des Diffeomorphismus notwendige Lösung der nichtlinearen charakteristischen Gleichung (4.40) kann nun konkretisiert werden. Im vorliegenden Fall ist diese Gleichung dritter Ordnung und hier vektoriell formuliert

$$\mathbf{o} = \mathbf{L}_{bk\mathbf{f}_x}^3 {}^{bnf}h_{\mathbf{x}} + \mathbf{L}_{bk\mathbf{f}_x}^2 \boldsymbol{\varphi}_3 + \mathbf{L}_{bk\mathbf{f}_x}^1 \boldsymbol{\varphi}_2 + \boldsymbol{\varphi}_1. \quad (4.43)$$

Wie aus Gleichung (4.43) ersichtlich erfordert das Aufstellen der Gleichung die mehrfache Lie-Ableitung der noch unbekannten Ausgangsabbildung  ${}^{bnf}h_{\mathbf{x}}$ , und der nichtlinearen additiven Terme  $\boldsymbol{\varphi}_i$ . Die Ableitung erfolgt entlang des Driftfeldes der NBKNF. Die Verwendung der Lie-Ableitung anstelle des verallgemeinerten Differentialoperators ist hier zulässig, da die Gleichung zeitinvariant und das System eingangsaffin ist. Zunächst wird die dreifache Lie-Ableitung der Ausgangsabbildung bestimmt. Da diese nur von den Ausgangsgrößen  $\mathbf{y}$  abhängt, die in der NBKNF der mit 1 indizierten Zustandsgrößen zugeordnet sind, vereinfacht sich die Differenzierung des Vektors. Da die Lie-Ableitung rekursiv definiert ist, folgt

für die einzelnen Zwischenergebnisse

$$\mathbf{L}_{bk\mathbf{f}_x}^{bnf}\mathbf{h}_x = \begin{bmatrix} \frac{\partial^{bnf}\mathbf{h}_x}{\partial\mathbf{y}^T} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^{bk}\mathbf{x}_2 \\ {}^{bk}\mathbf{x}_3 \\ {}^{bk}\mathbf{f}_{x,3} \end{bmatrix} = \frac{\partial^{bnf}\mathbf{h}_x}{\partial\mathbf{y}^T} {}^{bk}\mathbf{x}_2$$

Die Berechnung der zweiten Lie-Ableitung erfolgt mittels Korollar 3, so dass die Teilableitungen ausgewertet werden können

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_{bk\mathbf{f}_x}^2{}^{bnf}\mathbf{h}_x &= \frac{\partial}{\partial {}^{bk}\mathbf{x}^T} \left( \frac{\partial^{bnf}\mathbf{h}_x}{\partial\mathbf{y}^T} {}^{bk}\mathbf{x}_2 \right) {}^{bk}\mathbf{f}_x, \quad \text{mit } \mathbf{A} = \frac{\partial^{bnf}\mathbf{h}_x}{\partial\mathbf{y}^T} \\ &\quad \left| \begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{A} {}^{bk}\mathbf{x}_2}{\partial {}^{bk}\mathbf{x}^T} &= \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial {}^{bk}\mathbf{x}^T} (\mathbf{I}_{3n_{dof}} \otimes {}^{bk}\mathbf{x}_2) + \mathbf{A} \frac{\partial {}^{bk}\mathbf{x}_2}{\partial {}^{bk}\mathbf{x}^T} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{A}^* & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{A} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad \text{mit } \mathbf{A}^* = \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial\mathbf{y}^T} (\mathbf{I}_{n_{dof}} \otimes {}^{bk}\mathbf{x}_2) \end{aligned} \right. \\ &= \mathbf{A}^* {}^{bk}\mathbf{x}_2 + \mathbf{A} {}^{bk}\mathbf{x}_3. \end{aligned}$$

Die für die charakteristische Gleichung notwendige dritte Lie-Ableitung folgt nach erneuter Rekursion

$$\mathbf{L}_{bk\mathbf{f}_x}^3{}^{bnf}\mathbf{h}_x = \frac{\partial}{\partial {}^{bk}\mathbf{x}^T} (\mathbf{A}^* {}^{bk}\mathbf{x}_2 + \mathbf{A} {}^{bk}\mathbf{x}_3) {}^{bk}\mathbf{f}_x = \frac{\partial \mathbf{A}^* {}^{bk}\mathbf{x}_2}{\partial {}^{bk}\mathbf{x}^T} {}^{bk}\mathbf{f}_x + \frac{\partial \mathbf{A} {}^{bk}\mathbf{x}_3}{\partial {}^{bk}\mathbf{x}^T} {}^{bk}\mathbf{f}_x.$$

Die beiden Summanden der Gleichung werden separat ausgewertet. Der zweite Summand der Gleichung kann analog zur zweiten Lie-Ableitung behandelt werden. Lediglich der Zustandsvektor ist ausgetauscht

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{A}^* {}^{bk}\mathbf{x}_2}{\partial {}^{bk}\mathbf{x}^T} {}^{bk}\mathbf{f}_x &= \frac{\partial \mathbf{A}^*}{\partial {}^{bk}\mathbf{x}^T} (\mathbf{I}_{3n_{dof}} \otimes {}^{bk}\mathbf{x}_2) {}^{bk}\mathbf{f}_x + \mathbf{A}^* \frac{\partial {}^{bk}\mathbf{x}_2}{\partial {}^{bk}\mathbf{x}^T} {}^{bk}\mathbf{f}_x \\ \frac{\partial \mathbf{A} {}^{bk}\mathbf{x}_3}{\partial {}^{bk}\mathbf{x}^T} {}^{bk}\mathbf{f}_x &= \mathbf{A}^* {}^{bk}\mathbf{x}_3 + \mathbf{A} {}^{bk}\mathbf{f}_{x,3}. \end{aligned}$$

Die Matrix  $\mathbf{A}^*$  ist nicht mehr nur von den Ausgangsgrößen abhängig, sondern auch von dem mit Index 2 gekennzeichneten Zustandsvektor. Insgesamt also von den ersten  $2n_{dof}$  Elementen des Zustandsvektors in NBKNF. Zur Bestimmung wird erneut auf die Produktregel (Korollar 3) zurückgegriffen

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{A}^*}{\partial {}^{bk}\mathbf{x}^T} &= \frac{\partial}{\partial {}^{bk}\mathbf{x}^T} \left( \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial\mathbf{y}^T} (\mathbf{I}_{n_{dof}} \otimes {}^{bk}\mathbf{x}_2) \right) = \\ &\quad \frac{\partial}{\partial {}^{bk}\mathbf{x}^T} \left( \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial\mathbf{y}^T} \right) (\mathbf{I}_{3n_{dof}} \otimes \mathbf{I}_{n_{dof}} \otimes {}^{bk}\mathbf{x}_2) + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial\mathbf{y}^T} \frac{\partial (\mathbf{I}_{n_{dof}} \otimes {}^{bk}\mathbf{x}_2)}{\partial {}^{bk}\mathbf{x}^T}. \quad (4.44) \end{aligned}$$

Dabei gilt im folgenden die Zusammenfassung  $\mathbf{A} = \mathbf{I}_{n_{\text{dof}}} \otimes \mathbf{I}_{n_{\text{dof}}} \otimes {}^{bk}\mathbf{x}_2 = \mathbf{I}_{n_{\text{dof}}^2} \otimes {}^{bk}\mathbf{x}_2$ . Damit lässt sich die Ableitung weiter auswerten. Zur Ableitung des Kroneckerproduktes wird auf Definition 9 zurückgegriffen.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial {}^{bk}\mathbf{x}^T} \left( \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \mathbf{y}^T} \right) (\mathbf{I}_{3n_{\text{dof}}} \otimes \mathbf{I}_{n_{\text{dof}}} \otimes {}^{bk}\mathbf{x}_2) &= \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \mathbf{y}^T} \left( \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \mathbf{y}^T} \right) & \mathbf{o} & \mathbf{o} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{o} & \mathbf{o} \\ \mathbf{o} & \mathbf{A} & \mathbf{o} \\ \mathbf{o} & \mathbf{o} & \mathbf{A} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \mathbf{y}^T} \left( \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \mathbf{y}^T} \right) \mathbf{A} & \mathbf{o} & \mathbf{o} \end{bmatrix} \\ \frac{\partial (\mathbf{I}_{n_{\text{dof}}} \otimes {}^{bk}\mathbf{x}_2)}{\partial {}^{bk}\mathbf{x}^T} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial (\mathbf{I}_{n_{\text{dof}}} \otimes {}^{bk}\mathbf{x}_2)}{\partial {}^{bk}x_1} & \dots & \frac{\partial (\mathbf{I}_{n_{\text{dof}}} \otimes {}^{bk}\mathbf{x}_2)}{\partial {}^{bk}x_{3n_{\text{dof}}}} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Da die Matrix  $\mathbf{A}$  nur von der Ausgangsgröße abhängt, ist die Ableitung in obigen Gleichungen entsprechend vereinfacht worden. Für die zweite Komponente der Gleichung liefert die Auswertung der Ableitung des Skalarproduktes

$$\begin{aligned} \frac{\partial (\mathbf{I}_{n_{\text{dof}}} \otimes {}^{bk}\mathbf{x}_2)}{\partial {}^{bk}x_i} &= \begin{cases} \begin{bmatrix} \mathbf{t}_i & \mathbf{o} & \dots & \mathbf{o} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{o} & \dots & \mathbf{o} & \mathbf{t}_i \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{o} & \dots & \mathbf{o} & \mathbf{t}_i \end{bmatrix} & : i \in \{n_{\text{dof}} + 1, \dots, 2n_{\text{dof}}\} \\ \mathbf{o} & : \text{sonst} \end{cases} \\ \text{mit } \mathbf{t}_i &= \begin{bmatrix} t_{i,1} & \dots & t_{i,n_{\text{dof}}} \end{bmatrix}, t_{i,j} = \begin{cases} 1 & : i = j \\ 0 & : \text{sonst} \end{cases}. \end{aligned}$$

Der gesamte zweite Summand aus der Ableitung ergibt sich mit den obigen Rechnungen zu

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \mathbf{y}^T} \frac{\partial (\mathbf{I}_{n_{\text{dof}}} \otimes {}^{bk}\mathbf{x}_2)}{\partial {}^{bk}\mathbf{x}^T} &= \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \mathbf{y}^T} \begin{bmatrix} \mathbf{o} & \dots & \mathbf{o} & \mathbf{T}_1 & \dots & \mathbf{T}_{n_{\text{dof}}} & \mathbf{o} & \dots & \mathbf{o} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{o} & \dots & \mathbf{o} & \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \mathbf{y}^T} \mathbf{T}_1 & \dots & \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \mathbf{y}^T} \mathbf{T}_{n_{\text{dof}}} & \mathbf{o} & \dots & \mathbf{o} \end{bmatrix} \\ &\quad \left| \begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \mathbf{y}^T} \mathbf{T}_i &= \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \text{bnf}_{\mathbf{h}_{\mathbf{x}}}}{\partial y_1 \partial y_1} & \frac{\partial^2 \text{bnf}_{\mathbf{h}_{\mathbf{x}}}}{\partial y_1 \partial y_2} & \dots & \frac{\partial^2 \text{bnf}_{\mathbf{h}_{\mathbf{x}}}}{\partial y_{n_{\text{dof}}} \partial y_{n_{\text{dof}}}} \end{bmatrix} \mathbf{T}_i \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \text{bnf}_{\mathbf{h}_{\mathbf{x}}}}{\partial y_1 \partial y_i} & \dots & \frac{\partial^2 \text{bnf}_{\mathbf{h}_{\mathbf{x}}}}{\partial y_{n_{\text{dof}}} \partial y_i} \end{bmatrix} = \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial y_i} \end{aligned} \right. \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{o} & \dots & \mathbf{o} & \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial y_{n_{\text{dof}}}} \mathbf{o} & \dots & \mathbf{o} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Beide Summanden können nun überlagert werden. Durch die unterschiedlichen Abhängigkeiten tauchen sie nicht in den gleichen Spalten und Zeilen der Zielmatrix auf. Die Berechnung

des Teilausdrucks ist damit abgeschlossen

$$\frac{\partial \mathbf{A}^*}{\partial {}^{bk}\mathbf{x}^T} (\mathbf{I}_{3n_{dof}} \otimes {}^{bk}\mathbf{x}_2) {}^{bk}\mathbf{f}_x = \left[ \frac{\partial^3 {}^{bnf}\mathbf{h}_x}{\partial (\mathbf{y}^T)^3} \mathbf{A}(\mathbf{I}_{n_{dof}} \otimes {}^{bk}\mathbf{x}_2) \quad \frac{\partial^2 {}^{bnf}\mathbf{h}_x}{\partial (\mathbf{y}^T)^2} (\mathbf{I}_{n_{dof}} \otimes {}^{bk}\mathbf{x}_2) \quad \mathbf{0} \right]$$

Auf die Auflösung des Kroneckerproduktes in der obigen Gleichung zu einer Summenschreibweise wird verzichtet. Das auf die NBKNF transformierte System ist ebenfalls unter Verwendung der Matrizendifferentialrechnung hergeleitet. Durch die Symmetrie des Systems bzgl. der einzelnen Dimensionen ist dies die übersichtlichste Darstellung. Insbesondere erlaubt dies die Isolation der Zustandsvariablen in einheitlicher Form. Dies erleichtert die Lösung der nichtlinearen charakteristischen Gleichung. Die dritte Lie-Ableitung liegt nun vor

$$\mathbf{L}_{{}^{bk}\mathbf{f}_x}^3 {}^{bnf}\mathbf{h}_x = \left[ \frac{\partial^3 {}^{bnf}\mathbf{h}_x}{\partial (\mathbf{y}^T)^3} \mathbf{A}(\mathbf{I}_{n_{dof}} \otimes {}^{bk}\mathbf{x}_2) \quad 3 \cdot \frac{\partial^2 {}^{bnf}\mathbf{h}_x}{\partial (\mathbf{y}^T)^2} (\mathbf{I}_{n_{dof}} \otimes {}^{bk}\mathbf{x}_2) \quad \frac{\partial {}^{bnf}\mathbf{h}_x}{\partial (\mathbf{y}^T)} \right]. \quad (4.45)$$

Diese kann nun aus sämtlichen Teillösungen zusammengesetzt werden. Mit den Ableitungen der nichtlinearen additiven Terme verhält es sich ähnlich. Auch diese sind in der NBNF ausschließlich von den Systemausgängen abhängig, siehe Definition 5. Die zu lösende partielle Differentialgleichung lautet

$$\begin{aligned} \mathbf{0} = & \frac{\partial^3 {}^{bnf}\mathbf{h}_x}{\partial (\mathbf{y}^T)^3} \left( \mathbf{I}_{n_{dof}^2} \otimes {}^{bk}\mathbf{x}_2 \right) \left( \mathbf{I}_{n_{dof}} \otimes {}^{bk}\mathbf{x}_2 \right) {}^{bk}\mathbf{x}_2 \quad \dots \quad (4.46) \\ & + 3 \frac{\partial^2 {}^{bnf}\mathbf{h}_x}{\partial (\mathbf{y}^T)^2} \left( \mathbf{I}_{n_{dof}} \otimes {}^{bk}\mathbf{x}_2 \right) {}^{bk}\mathbf{x}_3 \quad \dots \\ & + \frac{\partial {}^{bnf}\mathbf{h}_x}{\partial (\mathbf{y}^T)} {}^{bk}\mathbf{f}_x \quad \dots \\ & + \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial (\mathbf{y}^T)^2} \left( \mathbf{I}_{n_{dof}} \otimes {}^{bk}\mathbf{x}_2 \right) {}^{bk}\mathbf{x}_2 \quad \dots \\ & + \frac{\partial \varphi_3}{\partial (\mathbf{y}^T)} {}^{bk}\mathbf{x}_3 \quad \dots \\ & + \frac{\partial \varphi_2}{\partial (\mathbf{y}^T)} {}^{bk}\mathbf{x}_2 \quad \dots \\ & + \varphi_1 \end{aligned}$$

Für das System muss nun die Existenz einer Lösung überprüft werden. Da auf die Beschreibung mittels Differentialgeometrie bei diesem Ansatz verzichtet wird, ist die Lösbarkeit der Gleichungen in [44] über die Integrabilität beschrieben. Dafür wird Gleichung (4.46) nach  ${}^{bk}\mathbf{f}_x$  aufgelöst. Daraus folgt die Struktur, die die dritte vektorielle Komponente des Systems in NBKNF ausweisen muss. Anschließend müssen die einzelnen Gleichungen lösbar sein

$$\begin{aligned} {}^{bk}\mathbf{f}_x = & \left( \frac{\partial {}^{bnf}\mathbf{h}_x}{\partial (\mathbf{y}^T)} \right)^{-1} \left( \frac{\partial^3 {}^{bnf}\mathbf{h}_x}{\partial (\mathbf{y}^T)^3} \boldsymbol{\Psi}_1 + 3 \frac{\partial^2 {}^{bnf}\mathbf{h}_x}{\partial (\mathbf{y}^T)^2} \boldsymbol{\Psi}_2 \dots \right. \\ & \left. + \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial (\mathbf{y}^T)^2} \boldsymbol{\Psi}_3 + \frac{\partial \varphi_3}{\partial (\mathbf{y}^T)} {}^{bk}\mathbf{x}_3 + \frac{\partial \varphi_2}{\partial (\mathbf{y}^T)} {}^{bk}\mathbf{x}_2 + \varphi_1 \right), \quad (4.47) \end{aligned}$$

wobei in Gleichung (4.47) die Matrizen  $\Psi_i$  wie folgt definiert sind

$$\begin{aligned}\Psi_1 &= \left( \mathbf{I}_{n_{dof}^2} \otimes {}^{bk}\mathbf{x}_2 \right) \left( \mathbf{I}_{n_{dof}} \otimes {}^{bk}\mathbf{x}_2 \right) {}^{bk}\mathbf{x}_2, \\ \Psi_2 &= \left( \mathbf{I}_{n_{dof}} \otimes {}^{bk}\mathbf{x}_2 \right) {}^{bk}\mathbf{x}_3 \qquad \Psi_3 = \left( \mathbf{I}_{n_{dof}} \otimes {}^{bk}\mathbf{x}_2 \right) {}^{bk}\mathbf{x}_2.\end{aligned}$$

Die Analyse erfordert nun die Transformation des Systems in die NBKNF. Durch die Auslassung der geschwindigkeitsproportionalen Reibung ist die Transformation dabei einfacher. Mit den Ergebnissen aus Abschnitt 4.2 und der Transformationsvorschrift Gleichung (4.33) folgt für die inverse Transformation

$${}^{zrd}\mathbf{x} = {}^{bk}\mathbf{w}_{zrd}^{-1} ({}^{bk}\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} {}^{bk}\mathbf{x}_1 \\ {}^{bk}\mathbf{x}_2 \\ \sigma \mathbf{J}_q^{-T} (M_q {}^{bk}\mathbf{x}_3 + \boldsymbol{\xi}) \end{bmatrix}.$$

Durch den komponentenweise durchgeführten Vergleich ergeben sich die partiellen Differentialgleichungen

$$\begin{aligned}\frac{\partial M_q^{-1} \sigma \mathbf{J}_q^T {}^{zrd}\mathbf{x}_3}{\partial {}^{zrd}\mathbf{x}_1^T} &= M_q^{-1} \left( \frac{\partial \sigma \mathbf{J}_q^T}{\partial {}^{zrd}\mathbf{x}_1^T} (\mathbf{I}_{n_{dof}} \otimes {}^{zrd}\mathbf{x}_3) - \frac{\partial M_q}{\partial {}^{zrd}\mathbf{x}_1^T} (\mathbf{I}_{n_{dof}} \otimes M_q^{-1} \sigma \mathbf{J}_q^T {}^{zrd}\mathbf{x}_3) \right) \\ &= M_q^{-1} \frac{\partial \sigma \mathbf{J}_q^T}{\partial {}^{zrd}\mathbf{x}_1^T} (\mathbf{I}_{n_{dof}} \otimes \sigma \mathbf{J}_q^{-T} (M_q {}^{bk}\mathbf{x}_3 + \boldsymbol{\xi})) \\ &\quad - \underbrace{M_q^{-1} \frac{\partial M_q}{\partial {}^{zrd}\mathbf{x}_1^T} (\mathbf{I}_{n_{dof}} \otimes (M_q^{-1} \boldsymbol{\xi}))}_{=0} - M_q^{-1} \frac{\partial M_q}{\partial {}^{zrd}\mathbf{x}_1^T} (\mathbf{I}_{n_{dof}} \otimes {}^{bk}\mathbf{x}_3) \\ - \frac{\partial M_q^{-1} \boldsymbol{\xi}}{\partial {}^{zrd}\mathbf{x}_1^T} &= \underbrace{M_q^{-1} \frac{\partial M_q}{\partial {}^{zrd}\mathbf{x}_1^T} (\mathbf{I}_{n_{dof}} \otimes M_q^{-1} \boldsymbol{\xi})}_{=0} - M_q^{-1} \frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial {}^{zrd}\mathbf{x}_1^T} \\ - \frac{\partial M_q^{-1} \boldsymbol{\xi}}{\partial {}^{zrd}\mathbf{x}_2^T} &= -M_q^{-1} \frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial {}^{zrd}\mathbf{x}_2^T}.\end{aligned}$$

Damit sind die Komponenten der NBKNF bestimmt. Die Ableitungen nach  ${}^{zrd}\mathbf{x}_1$  sind mit  ${}^{bk}\mathbf{x}_2$  zu multiplizieren, diejenigen nach  ${}^{zrd}\mathbf{x}_2$  mit  ${}^{bk}\mathbf{x}_3$ . Die markierten Terme kompensieren sich. Durch die Identitätsabbildungen der ersten Zustandsgrößen sind die obigen Gleichungen bereits vollständig, mit Ausnahme der Eingangsgröße, in NBKNF formuliert. Um die Integrabilität zu prüfen, werden die noch offenen Ableitungen ausgeführt und in die selbe Form gebracht, in der auch Gleichung (4.47) vorliegt. Dazu muss der Vektor  $\boldsymbol{\xi}$ , der die verallgemeinerten Kräfte zusammenfasst, in seine Komponenten zerlegt werden. Anschließend wird die Coriolismatrix gemäß Gleichung (4.11) zerlegt. In der so entstandenen Gleichung können die mit  ${}^{zrd}\mathbf{x}_2$  gekennzeichneten Zustände zu isoliert werden

$$-M_q^{-1} \frac{\partial \mathbf{C}_q {}^{zrd}\mathbf{x}_2}{\partial {}^{zrd}\mathbf{x}_2^T} {}^{zrd}\mathbf{x}_3 = -M_q^{-1} \mathbf{C}_q {}^{zrd}\mathbf{x}_3 - M_q^{-1} \frac{\partial \mathbf{C}_q}{\partial {}^{zrd}\mathbf{x}_2^T} (\mathbf{I}_{n_{dof}} \otimes {}^{zrd}\mathbf{x}_2) {}^{zrd}\mathbf{x}_3.$$

Für den ersten Summanden gilt nach Ersetzen der Coriolismatrix

$$\begin{aligned} & -M_q^{-1} \left( ({}^{zrd}\mathbf{x}_2^T \otimes \mathbf{I}_{n_{dof}}) \frac{\partial M_q}{\partial {}^{zrd}\mathbf{x}_1} - \frac{1}{2} (\mathbf{I}_{n_{dof}} \otimes {}^{zrd}\mathbf{x}_2^T) \frac{\partial M_q}{\partial {}^{zrd}\mathbf{x}_1} \right) {}^{zrd}\mathbf{x}_3 \\ &= -M_q^{-1} \left( \frac{\partial M_q}{\partial {}^{zrd}\mathbf{x}_1^T} - \frac{1}{2} \frac{\partial \text{row}(M_q)}{\partial {}^{zrd}\mathbf{x}_1^T} \right) (\mathbf{I}_{n_{dof}} \otimes {}^{zrd}\mathbf{x}_3) {}^{zrd}\mathbf{x}_2, \end{aligned}$$

und für Ableitungen im zweiten Term

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial {}^{zrd}\mathbf{x}_2^T} ({}^{zrd}\mathbf{x}_2^T \otimes \mathbf{I}_{n_{dof}}) \frac{\partial M_q}{\partial {}^{zrd}\mathbf{x}_1} &= \frac{\partial M_q}{\partial {}^{zrd}\mathbf{x}_1^T} \\ \frac{\partial}{\partial {}^{zrd}\mathbf{x}_2^T} (\mathbf{I}_{n_{dof}} \otimes {}^{zrd}\mathbf{x}_2^T) \frac{\partial M_q}{\partial {}^{zrd}\mathbf{x}_1} &= \frac{\partial \text{row}(M_q)}{\partial {}^{zrd}\mathbf{x}_1}. \end{aligned}$$

Damit folgt schließlich für den gesamten Ausdruck

$$\begin{aligned} -M_q^{-1} \frac{\partial C_q}{\partial {}^{zrd}\mathbf{x}_2^T} {}^{zrd}\mathbf{x}_2 {}^{zrd}\mathbf{x}_3 &= -M_q^{-1} \mathbf{K}_1 ((\mathbf{I}_{n_{dof}} \otimes {}^{zrd}\mathbf{x}_3) {}^{zrd}\mathbf{x}_2 + (\mathbf{I}_{n_{dof}} \otimes {}^{zrd}\mathbf{x}_2) {}^{zrd}\mathbf{x}_3) \\ &= -M_q^{-1} \mathbf{R}({}^{zrd}\mathbf{x}_1) (\mathbf{I}_{n_{dof}} \otimes {}^{zrd}\mathbf{x}_3) {}^{zrd}\mathbf{x}_2. \end{aligned}$$

Die Umformungen der obigen Gleichung erfolgt mit Hilfe der Äquivalenzumformungen 3 und 4. Diese erlauben auch die Gleichung auf eine vereinheitlichte Struktur zu transformieren. Der Anteil der konservativen Kräfte in  $\boldsymbol{\xi}$  wurde direkt vernachlässigt, da diese unabhängig von den Zuständen  ${}^{zrd}\mathbf{x}_2$  sind. Für die Ableitungen nach der anderen Zustandsgröße wird die Coriolismatrix analog aufgelöst

$$-M_q^{-1} \frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial {}^{zrd}\mathbf{x}_1^T} {}^{zrd}\mathbf{x}_2 \rightarrow -M_q^{-1} \frac{\partial C_q}{\partial {}^{zrd}\mathbf{x}_1^T} {}^{zrd}\mathbf{x}_2 {}^{zrd}\mathbf{x}_2 = -M_q^{-1} \frac{\partial C_q}{\partial {}^{zrd}\mathbf{x}_1^T} (\mathbf{I}_{n_{dof}} \otimes {}^{zrd}\mathbf{x}_2) {}^{zrd}\mathbf{x}_2.$$

Der obige Ausdruck enthält die Zustandsgrößen  ${}^{zrd}\mathbf{x}_2$  in drei Faktoren. Um sie mit der charakteristischen Gleichung zu vergleichen und die Lösungen zu bestimmen, wird eine Struktur wie in Gleichung (4.46) angestrebt und die Coriolismatrix entsprechend aufgelöst

$$\begin{aligned} & -M_q^{-1} \frac{\partial C_q}{\partial {}^{zrd}\mathbf{x}_1^T} {}^{zrd}\mathbf{x}_2 {}^{zrd}\mathbf{x}_2 \\ &= -M_q^{-1} \frac{\partial^2 M_q}{\partial ({}^{zrd}\mathbf{x}_1^T)^2} (\mathbf{I}_{n_{dof}} \otimes {}^{zrd}\mathbf{x}_2 \otimes \mathbf{I}_{n_{dof}}) (\mathbf{I}_{n_{dof}} \otimes {}^{zrd}\mathbf{x}_2) {}^{zrd}\mathbf{x}_2 \\ &\quad + \frac{1}{2} M_q^{-1} (\mathbf{I}_{n_{dof}} \otimes {}^{zrd}\mathbf{x}_2) \frac{\partial^2 M_q}{\partial {}^{zrd}\mathbf{x}_1 \partial {}^{zrd}\mathbf{x}_1^T} (\mathbf{I}_{n_{dof}} \otimes {}^{zrd}\mathbf{x}_2) {}^{zrd}\mathbf{x}_2 \\ &= -M_q^{-1} \frac{\partial^2 M_q}{\partial ({}^{zrd}\mathbf{x}_1^T)^2} (\mathbf{I}_{n_{dof}}^2 \otimes {}^{zrd}\mathbf{x}_2) (\mathbf{I}_{n_{dof}} \otimes {}^{zrd}\mathbf{x}_2) {}^{zrd}\mathbf{x}_2 \\ &\quad + \frac{1}{2} M_q^{-1} \frac{\partial^2 \text{row } M_q}{\partial {}^{zrd}\mathbf{x}_1 \partial {}^{zrd}\mathbf{x}_1^T} (\mathbf{I}_{n_{dof}}^2 \otimes {}^{zrd}\mathbf{x}_2) (\mathbf{I}_{n_{dof}} \otimes {}^{zrd}\mathbf{x}_2) {}^{zrd}\mathbf{x}_2 \end{aligned}$$

Zusammengefasst mit der Matrix  $\mathbf{K}_1$  folgt dann

$$-\mathbf{M}_q^{-1} \frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial {}^{zrd}\mathbf{x}_1^T} {}^{zrd}\mathbf{x}_2 = -\mathbf{M}_q^{-1} \frac{\partial \mathbf{K}_1}{\partial {}^{zrd}\mathbf{x}_1^T} \left( \mathbf{I}_{n_{dof}^2} \otimes {}^{zrd}\mathbf{x}_2 \right) \left( \mathbf{I}_{n_{dof}} \otimes {}^{zrd}\mathbf{x}_2 \right) {}^{zrd}\mathbf{x}_2$$

Es fehlt noch die Ableitung der durch die konservativen Kräfte eingetragenen Anteile in  $\boldsymbol{\xi}$ . Da diese ausschließlich von den Zuständen  ${}^{bk}\mathbf{x}_1$  abhängig sind, ist die erforderliche Form direkt ablesbar

$$-\mathbf{M}_q^{-1} \frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial {}^{zrd}\mathbf{x}_1^T} {}^{zrd}\mathbf{x}_2 \rightarrow -\mathbf{M}_q^{-1} \frac{\partial \mathbf{g}_q}{\partial {}^{zrd}\mathbf{x}_1^T} {}^{zrd}\mathbf{x}_2$$

Es existiert ein weiterer Term, der ebenfalls drei Faktoren mit  ${}^{bk}\mathbf{x}_2$  besitzt und auf die obige Struktur transformiert werden kann

$$\begin{aligned} & \mathbf{M}_q^{-1} \frac{\partial \boldsymbol{\sigma} \mathbf{J}_q^T}{\partial {}^{zrd}\mathbf{x}_1^T} \left( \mathbf{I}_{n_{dof}} \otimes \boldsymbol{\sigma} \mathbf{J}_q^{-T} \boldsymbol{\xi} \right) {}^{zrd}\mathbf{x}_2 \\ & \rightarrow \mathbf{M}_q^{-1} \frac{\partial \boldsymbol{\sigma} \mathbf{J}_q^T}{\partial {}^{zrd}\mathbf{x}_1^T} \left( \mathbf{I}_{n_{dof}} \otimes \left( \boldsymbol{\sigma} \mathbf{J}_q^{-T} \mathbf{K}_1 \left( \mathbf{I}_{n_{dof}} \otimes {}^{zrd}\mathbf{x}_2 \right) {}^{zrd}\mathbf{x}_2 \right) \right) {}^{zrd}\mathbf{x}_2 \\ & = \mathbf{M}_q^{-1} \frac{\partial \boldsymbol{\sigma} \mathbf{J}_q^T}{\partial {}^{zrd}\mathbf{x}_1^T} \left( \mathbf{I}_{n_{dof}} \otimes \boldsymbol{\sigma} \mathbf{J}_q^{-T} \mathbf{K}_1 \right) \left( \mathbf{I}_{n_{dof}} \otimes \left( \left( \mathbf{I}_{n_{dof}} \otimes {}^{zrd}\mathbf{x}_2 \right) {}^{zrd}\mathbf{x}_2 \right) \right) {}^{zrd}\mathbf{x}_2 \\ & = \mathbf{M}_q^{-1} \frac{\partial \boldsymbol{\sigma} \mathbf{J}_q^T}{\partial {}^{zrd}\mathbf{x}_1^T} \left( \mathbf{I}_{n_{dof}} \otimes \boldsymbol{\sigma} \mathbf{J}_q^{-T} \mathbf{K}_1 \right) \left( \mathbf{I}_{n_{dof}^2} \otimes {}^{zrd}\mathbf{x}_2 \right) \left( \mathbf{I}_{n_{dof}} \otimes {}^{zrd}\mathbf{x}_2 \right) {}^{zrd}\mathbf{x}_2. \end{aligned}$$

Weiterhin existiert noch der Term mit den Anteilen aus dem Gravitationsvektor

$$\mathbf{M}_q^{-1} \frac{\partial \boldsymbol{\sigma} \mathbf{J}_q^T}{\partial {}^{zrd}\mathbf{x}_1^T} \left( \mathbf{I}_{n_{dof}} \otimes \boldsymbol{\sigma} \mathbf{J}_q^{-T} \boldsymbol{\xi} \right) {}^{zrd}\mathbf{x}_2 \rightarrow \mathbf{M}_q^{-1} \frac{\partial \boldsymbol{\sigma} \mathbf{J}_q^T}{\partial {}^{zrd}\mathbf{x}_1^T} \left( \mathbf{I}_{n_{dof}} \otimes \boldsymbol{\sigma} \mathbf{J}_q^{-T} \mathbf{g}_q \right) {}^{zrd}\mathbf{x}_2.$$

Dieser ist linear von den im Vektor  ${}^{zrd}\mathbf{x}_2$  zusammengefassten Zuständen abhängig. Im verbleibenden Summanden werden nun auch die allgemeinen Kräfte ersetzt

$$\begin{aligned} & \mathbf{M}_q^{-1} \frac{\partial \boldsymbol{\sigma} \mathbf{J}_q^T}{\partial {}^{zrd}\mathbf{x}_1^T} \left( \mathbf{I}_{n_{dof}} \otimes \boldsymbol{\sigma} \mathbf{J}_q^{-T} \left( \mathbf{M}_q {}^{bk}\mathbf{x}_3 \right) \right) {}^{bk}\mathbf{x}_2 \\ & = \mathbf{M}_q^{-1} \frac{\partial \boldsymbol{\sigma} \mathbf{J}_q^T}{\partial {}^{zrd}\mathbf{x}_1^T} \left( \mathbf{I}_{n_{dof}} \otimes \boldsymbol{\sigma} \mathbf{J}_q^{-T} \mathbf{M}_q \right) \left( \mathbf{I}_{n_{dof}} \otimes {}^{bk}\mathbf{x}_3 \right) {}^{bk}\mathbf{x}_2. \end{aligned}$$

Die Gleichung in NBKNF steht damit fest und die nichtlineare Funktion kann zum Vergleich herangezogen werden, um die Integrabilität der nichtlinearen charakteristischen Gleichung zu prüfen. Mittels der Sortierung nach den Zustandsvektoren  ${}^{zrd}\mathbf{x}_2$ ,  ${}^{zrd}\mathbf{x}_3$  ist der Vergleich mit der partiellen Differentialgleichung möglich. Die korrespondierenden Faktoren können zugeordnet werden, um anschließend die Lösbarkeit der entstandenen verkoppelten partiellen Differentialgleichungen zu prüfen. Die Zusammenfassung sämtlicher Summanden ergibt die



Gleichung

$$\begin{aligned}
{}^{bk}\mathbf{f}_{x,3} = \mathbf{M}_q^{-1} & \left( -\frac{\partial \mathbf{K}_1}{\partial {}^{bk}\mathbf{x}_1^T} \quad \left( \mathbf{I}_{n_{dof}}^2 \otimes {}^{bk}\mathbf{x}_2 \right) \left( \mathbf{I}_{n_{dof}} \otimes {}^{bk}\mathbf{x}_2 \right) {}^{bk}\mathbf{x}_2 \quad \dots \right. \\
& + \frac{\partial \sigma \mathbf{J}_q^T}{\partial {}^{bk}\mathbf{x}_1^T} \left( \mathbf{I}_{n_{dof}} \otimes \sigma \mathbf{J}_q^{-T} \mathbf{K}_1 \right) \quad \left( \mathbf{I}_{n_{dof}}^2 \otimes {}^{bk}\mathbf{x}_2 \right) \left( \mathbf{I}_{n_{dof}} \otimes {}^{bk}\mathbf{x}_2 \right) {}^{bk}\mathbf{x}_2 \quad \dots \\
& - \frac{\partial \mathbf{M}_q}{\partial {}^{bk}\mathbf{x}_1^T} \quad \left( \mathbf{I}_{n_{dof}} \otimes {}^{bk}\mathbf{x}_3 \right) {}^{bk}\mathbf{x}_2 \quad \dots \\
& + \frac{\partial \sigma \mathbf{J}_q^T}{\partial {}^{bk}\mathbf{x}_1^T} \left( \mathbf{I}_{n_{dof}} \otimes \sigma \mathbf{J}_q^{-T} \mathbf{M}_q \right) \quad \left( \mathbf{I}_{n_{dof}} \otimes {}^{bk}\mathbf{x}_3 \right) {}^{bk}\mathbf{x}_2 \quad \dots \quad (4.48) \\
& - \mathbf{R} \quad \left( \mathbf{I}_{n_{dof}} \otimes {}^{bk}\mathbf{x}_3 \right) {}^{bk}\mathbf{x}_2 \quad \dots \\
& + \frac{\partial \sigma \mathbf{J}_q^T}{\partial {}^{zrd}\mathbf{x}_1^T} \left( \mathbf{I}_{n_{dof}} \otimes \sigma \mathbf{J}_q^{-T} \mathbf{g}_q \right) \quad {}^{bk}\mathbf{x}_2 \quad \dots \\
& - \frac{\partial \mathbf{g}_q}{\partial {}^{zrd}\mathbf{x}_1^T} \quad {}^{bk}\mathbf{x}_2 \quad \left. \right)
\end{aligned}$$

Ohne spezielle Forderungen an die Jakobimatrizen ist in Gleichung (4.48) nur die inverse Massenmatrix allen Summanden gemein. Der Vergleich mit Gleichung (4.47) liefert

$$\mathbf{M}_q^{-1} = \left( \frac{\partial {}^{bnf}\mathbf{h}_x}{\partial \mathbf{y}^T} \right)^{-1} \Leftrightarrow \frac{\partial {}^{bnf}\mathbf{h}_x}{\partial \mathbf{y}^T} = \mathbf{M}_q.$$

Daraus folgt: Die Massenmatrix des Roboters muss aus einer Potentialfunktion stammen, um die Bedingungen zu erfüllen. Da bzgl. der Definition der Ausgangsabbildung in der NBNF zusätzlich die Forderung gilt, dass die einzelnen Komponenten nur von einer der Ausgangsvariablen abhängig sein dürfen, siehe Definition 5, wäre die Massenmatrix zwangsweise eine Diagonalmatrix, eine Forderung die nur in Spezialfällen erfüllt ist. Für die nichtlinearen additiven Funktionen gilt

$$\frac{\partial \varphi_3}{\partial \mathbf{y}^T} = \mathbf{0} \Rightarrow \varphi_3 = \text{konst.} \quad \frac{\partial \varphi_2}{\partial \mathbf{y}^T} = \frac{\partial \sigma \mathbf{J}_q^T}{\partial \mathbf{y}^T} \left( \mathbf{I}_{n_{dof}} \otimes \sigma \mathbf{J}_q^{-T} \mathbf{g}_q \right) - \frac{\partial \mathbf{g}_q}{\partial \mathbf{y}^T} \quad \varphi_1 = 0.$$

Auch hier ist die Integrabilität von  $\varphi_2$  nicht gegeben, der erste Summand verhindert die Lösung der partiellen Differentialgleichung. Der spaltenweise Vergleich der Funktionen liefert

$$\left[ \frac{\partial \varphi_2}{\partial y_1} \quad \dots \quad \frac{\partial \varphi_2}{\partial y_n} \right] = \left[ \frac{\partial \sigma \mathbf{J}_q^T}{\partial y_1} \sigma \mathbf{J}_q^{-T} \mathbf{g}_q \quad \dots \quad \frac{\partial \sigma \mathbf{J}_q^T}{\partial y_n} \sigma \mathbf{J}_q^{-T} \mathbf{g}_q \right].$$

Die Prüfung der Integrabilität der für die ersten beiden Spalten liefert

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial y_1 \partial y_2} &= \frac{\partial^2 \sigma \mathbf{J}_q^T}{\partial y_1 \partial y_2} \sigma \mathbf{J}_q^{-T} \mathbf{g}_q + \frac{\partial \sigma \mathbf{J}_q^T}{\partial y_1} \sigma \mathbf{J}_q^{-T} \frac{\partial \sigma \mathbf{J}_q^T}{\partial y_2} \sigma \mathbf{J}_q^{-T} \mathbf{g}_q + \frac{\partial \sigma \mathbf{J}_q^T}{\partial y_1} \sigma \mathbf{J}_q^{-T} \frac{\partial \mathbf{g}_q}{\partial y_2} \\
\frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial y_1 \partial y_2} &= \frac{\partial^2 \sigma \mathbf{J}_q^T}{\partial y_1 \partial y_2} \sigma \mathbf{J}_q^{-T} \mathbf{g}_q + \frac{\partial \sigma \mathbf{J}_q^T}{\partial y_2} \sigma \mathbf{J}_q^{-T} \frac{\partial \sigma \mathbf{J}_q^T}{\partial y_1} \sigma \mathbf{J}_q^{-T} \mathbf{g}_q + \frac{\partial \sigma \mathbf{J}_q^T}{\partial y_2} \sigma \mathbf{J}_q^{-T} \frac{\partial \mathbf{g}_q}{\partial y_1}.
\end{aligned}$$

Die Gleichheit der beiden Ableitungen, die die Integrierbarkeit sicherstellen würden, ist also nur für Spezialfälle gegeben. Ein Beobachter nach Definition 5 ist unter diesen Voraussetzungen nicht zu entwerfen.

### Beobachterentwurf bei Position und Geschwindigkeit als Ausgangsgröße

Die vorigen Ausführungen haben gezeigt, dass der Entwurf eines Normalformbeobachters für das System, nur durch Stützung auf die Positionswerte, nicht möglich ist. Die Hinzunahme der Geschwindigkeiten als messbare Zustandsgröße reduziert die Ordnung der charakteristischen Gleichung. Es existieren dann  $3n_{dof}$  Zustandsgrößen mit  $2n_{dof}$  Ausgangsgrößen. Durch die Symmetrie bedeutet dies eine Unterteilung in jeweils  $n_{dof}$  Subsysteme der Ordnung 1 und 2. Da die Ausgangsgrößen paarweise mit ihren Ableitungen auftreten, ändert sich das Driftfeld in der NBKNF Form des Systems nicht. Die Transformationsvorschrift bleibt gleich, die Unterteilung in Subsysteme ist eine andere

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} {}^{bk}\mathbf{x}_1 \\ \vdots \\ {}^{bk}\mathbf{x}_2 \\ \vdots \\ {}^{bk}\mathbf{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^{bk}\mathbf{x}_2 \\ \vdots \\ {}^{bk}\mathbf{x}_3 \\ \vdots \\ {}^{bk}\mathbf{f}_x \end{bmatrix} + {}^{bk}\mathbf{G}\boldsymbol{\tau}_d, \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} {}^{bk}\mathbf{x}_1 \\ \vdots \\ {}^{bk}\mathbf{x}_2 \end{bmatrix}.$$

Daraus ergeben sich die charakteristischen Gleichungen

$$\mathbf{L}_{bk\mathbf{f}_x} {}^{bnf}\mathbf{h}_{x,1} + \boldsymbol{\varphi}_1 = \mathbf{0} \quad (4.49a)$$

$$\mathbf{L}_{bk\mathbf{f}_x}^2 {}^{bnf}\mathbf{h}_{x,2} + \mathbf{L}_{bk\mathbf{f}_x} \boldsymbol{\varphi}_1 + \boldsymbol{\varphi}_3 = \mathbf{0}. \quad (4.49b)$$

Aus der ersten partiellen Differentialgleichung, Gleichung (4.49a) erwachsen keine Bedingungen an das System. Verträglichkeitsbedingungen entstehen nur durch Gleichung (4.49b). Um diese zu bestimmen und eine Aussage über die Lösbarkeit der Differentialgleichungen machen zu können, die gleichbedeutend mit der Existenz des Normalformbeobachters sind, kann auf die Ergebnisse des vorigen Abschnittes zurückgegriffen werden. Die Ableitung der noch unbekannten Ausgangsabbildung der NBNF muss jedoch nach dem erweiterten Vektor  $\mathbf{y}$  erfolgen

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_{bk\mathbf{f}_x} {}^{bnf}\mathbf{h}_{x,1} &= \frac{\partial {}^{bnf}\mathbf{h}_{x,1}}{\partial \mathbf{y}_1^T} {}^{bk}\mathbf{x}_2 + \frac{\partial {}^{bnf}\mathbf{h}_{x,1}}{\partial \mathbf{y}_2^T} {}^{bk}\mathbf{f}_x \\ \xrightarrow{\text{Definition 5}} \mathbf{L}_{bk\mathbf{f}_x} {}^{bnf}\mathbf{h}_{x,1} &= \frac{\partial {}^{bnf}\mathbf{h}_{x,1}}{\partial \mathbf{y}_1^T} {}^{bk}\mathbf{x}_2. \end{aligned}$$

Für die zweifache Lie-Ableitung der zweiten charakteristischen Gleichung gilt

$$\begin{aligned} L_{bk \mathbf{f}_x}^2 {}^{bnf} \mathbf{h}_{x,2} &= \frac{\partial^2 {}^{bnf} \mathbf{h}_{x,2}}{\partial (\mathbf{y}_1^T)^2} (\mathbf{I}_{n_{dof}} \otimes {}^{bk} \mathbf{x}_2) {}^{bk} \mathbf{x}_2 + \frac{\partial^2 {}^{bnf} \mathbf{h}_{x,2}}{\partial \mathbf{y}_1^T \partial \mathbf{y}_2^T} (\mathbf{I}_{n_{dof}} \otimes {}^{bk} \mathbf{x}_3) {}^{bk} \mathbf{x}_2 \\ &\quad + \frac{\partial^2 {}^{bnf} \mathbf{h}_{x,2}}{\partial \mathbf{y}_2^T \partial \mathbf{y}_1^T} (\mathbf{I}_{n_{dof}} \otimes {}^{bk} \mathbf{x}_2) {}^{bk} \mathbf{x}_3 + \frac{\partial^2 {}^{bnf} \mathbf{h}_{x,2}}{\partial (\mathbf{y}_2^T)^2} (\mathbf{I}_{n_{dof}} \otimes {}^{bk} \mathbf{x}_3) {}^{bk} \mathbf{x}_3 + \frac{\partial {}^{bnf} \mathbf{h}_{x,2}}{\partial \mathbf{y}_2^T} {}^{bk} \mathbf{f}_x \end{aligned}$$

Die Ableitungen nach  $\mathbf{y}_1$  sind nach Definition 5 Null, so dass die finale Gleichung lautet

$${}^{bk} \mathbf{f}_x = - \left( \frac{\partial {}^{bnf} \mathbf{h}_{x,2}}{\partial (\mathbf{y}_2^T)} \right)^{-1} \left( \frac{\partial^2 {}^{bnf} \mathbf{h}_{x,2}}{\partial (\mathbf{y}_2^T)^2} (\mathbf{I}_{n_{dof}} \otimes {}^{bk} \mathbf{x}_3) {}^{bk} \mathbf{x}_3 + \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}_3}{\partial \mathbf{y}_1^T} {}^{bk} \mathbf{x}_2 + \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}_3}{\partial \mathbf{y}_2^T} {}^{bk} \mathbf{x}_3 + \boldsymbol{\varphi}_2 \right). \quad (4.50)$$

Da die letzte Komponente des Driftfeldes in NBKNF  ${}^{bk} \mathbf{f}_x$  keinen Term enthält, der zu  $(\mathbf{I}_{n_{dof}} \otimes {}^{bk} \mathbf{x}_3) {}^{bk} \mathbf{x}_3$  korrespondiert, muss die zweifache Ableitung der Ausgangsabbildung nach  $\mathbf{y}_2^T$  daher Null sein

$$\frac{\partial^2 {}^{bnf} \mathbf{h}_{x,2}}{\partial (\mathbf{y}_2^T)^2} = \mathbf{0} \Rightarrow \frac{\partial {}^{bnf} \mathbf{h}_{x,2}}{\partial (\mathbf{y}_2^T)} = \text{konst.} \Rightarrow {}^{bnf} \mathbf{h}_{x,2} = \mathbf{K}_1 \mathbf{y}_2 + \mathbf{K}_2. \quad (4.51)$$

Sämtliche Terme aus Gleichung (4.48) die eine einfache Abhängigkeit von  ${}^{bk} \mathbf{x}_3$  aufweisen können eindeutig zugeordnet werden. Mit Hilfe der Äquivalenzumformung 1 gilt dann

$$\frac{\partial \boldsymbol{\varphi}_3}{\partial \mathbf{y}_2^T} = \left( -\frac{\partial \mathbf{M}_q}{\partial {}^{bk} \mathbf{x}_1^T} + \frac{\partial \boldsymbol{\sigma} \mathbf{J}_q^T}{\partial {}^{bk} \mathbf{x}_1^T} (\mathbf{I}_{n_{dof}} \otimes \boldsymbol{\sigma} \mathbf{J}_q^{-T} \mathbf{M}_q) - 2 \mathbf{K}_1 \right) ({}^{bk} \mathbf{x}_2 \otimes \mathbf{I}_{n_{dof}}).$$

Zur Prüfung ob eine Lösung existiert ist die Verträglichkeit der einzelnen Ableitungen zu prüfen, um dann an Hand der zweifachen Ableitungen die Integrabilität sicherzustellen. Dazu werden die Spalten der Matrix benötigt

$$\begin{aligned} & - \sum_{i=1}^n {}^{bk} x_{2,i} \frac{\partial \mathbf{M}_q}{\partial {}^{bk} x_{1,i}} \xrightarrow{\text{Spalte } c} - \sum_{i=1}^n {}^{bk} x_{2,i} \frac{\partial \mathbf{m}_{q,c}}{\partial {}^{bk} x_{1,i}} = - \frac{\partial \mathbf{m}_{q,c}}{\partial {}^{bk} \mathbf{x}_1^T} {}^{bk} \mathbf{x}_2 \\ & \sum_{i=1}^n {}^{bk} x_{2,i} \frac{\partial \boldsymbol{\sigma} \mathbf{J}_q^T}{\partial {}^{bk} x_{1,i}} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{J}_q^{-T} \mathbf{M}_q \xrightarrow{\text{Spalte } c} \sum_{i=1}^n {}^{bk} x_{2,i} \frac{\partial \boldsymbol{\sigma} \mathbf{J}_q^T}{\partial {}^{bk} x_{1,i}} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{J}_q^{-T} \mathbf{m}_{q,c} \\ & \sum_{i=1}^n \frac{\partial \mathbf{m}_{q,i}^T}{\partial {}^{bk} \mathbf{x}_1} {}^{bk} x_{2,i} - 2 {}^{bk} x_{2,i} \frac{\partial \mathbf{M}_q}{\partial {}^{bk} x_{1,i}} \xrightarrow{\text{Spalte } c} \frac{\partial \mathbf{m}_{q,c}^T}{\partial {}^{bk} \mathbf{x}_1} {}^{bk} \mathbf{x}_2 - 2 \frac{\partial \mathbf{m}_{q,c}}{\partial {}^{bk} \mathbf{x}_1^T} {}^{bk} \mathbf{x}_2 \end{aligned}$$

Die allgemeine Spalte berechnet sich aus der Summe der obigen Teilergebnisse

$$\frac{\partial \boldsymbol{\varphi}_3}{\partial \mathbf{y}_{2,c}} = \sum_{i=1}^n {}^{bk} x_{2,i} \frac{\partial \boldsymbol{\sigma} \mathbf{J}_q^T}{\partial {}^{bk} x_{1,i}} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{J}_q^{-T} \mathbf{m}_{q,c} + \frac{\partial \mathbf{m}_{q,c}^T}{\partial {}^{bk} \mathbf{x}_1} {}^{bk} \mathbf{x}_2 - 3 \frac{\partial \mathbf{m}_{q,c}}{\partial {}^{bk} \mathbf{x}_1^T} {}^{bk} \mathbf{x}_2. \quad (4.52)$$

Die Integratibilität der Gleichung fordert

$$\frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial y_{2,c} \partial y_{2,d}} = \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial y_{2,d} \partial y_{2,c}}. \quad (4.53)$$

So dass der Ausdruck in Gleichung (4.52) nach einer zweiten Koordinate abzuleiten ist

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial y_{2,c} \partial y_{2,d}} = {}^{bk}x_{2,d} \frac{\partial \sigma \mathbf{J}_q^T}{\partial {}^{bk}x_{1,i}} \sigma \mathbf{J}_q^{-T} \mathbf{m}_{q,c} + \left[ \mathbf{0} \dots \mathbf{0} \quad \frac{\partial m_{q,c,d}}{\partial {}^{bk}x_1} \quad \mathbf{0} \dots \mathbf{0} \right] \\ - 3 \left[ \mathbf{0} \dots \mathbf{0} \quad \frac{\partial m_{q,c}}{\partial {}^{bk}x_{1,d}} \quad \mathbf{0} \dots \mathbf{0} \right]. \end{aligned} \quad (4.54)$$

Eine allgemeine Symmetrie des Ausdrucks bzgl. der Koordinaten  $c, d$  existiert nicht. Daher existiert beim vorliegenden Problem keine allgemeingültige Funktion  $\varphi_3$ , die die Bedingungen erfüllt. Die partielle Differentialgleichung ist daher nur in Spezialfällen lösbar. Das System kann daher nicht auf die nichtlineare Beobachternormalform nach Definition 5 transformiert werden, die für den Beobachter mit linearer Fehlerdynamik erforderlich ist. Dies liegt an den restriktiven Bedingungen, die sich bei Systemen hoher Ordnung aus der charakteristischen Gleichung ergeben. Ein skalarwertiges System unterliegt dieser Einschränkung hier nicht, da die Integratibilitätsbedingung implizit erfüllt ist.

## 4.5 Erweiterung auf Siegel Domain Beobachter

Der im vorigen Kapitel dargestellte Entwurf eines Beobachters, basierend auf der nichtlinearen Beobachternormalform, scheiterte an den restriktiven Bedingungen die sich durch die Transformationsvorschrift ergeben. Dennoch ist der Schritt den Beobachter in anderen beschreibenden Variablen zu entwerfen weiterhin ein gangbarer Weg bei nichtlinearen Systemen. Lässt sich das nichtlineare System nach Gleichung (4.7) derart transformieren, dass die nichtlinearen Einflüsse sämtlich in einem additiven Term zusammengefasst werden, so ist der Entwurf eines Beobachters mit linearer Fehlerdynamik möglich. Die restriktiven Bedingungen in Form von Integratibilitätsbedingungen die sich aus dem Entwurf nach [44] bzw. als Involutivitätsbedingungen nach [46] ergeben, entstehen durch die restriktive Normalform nach der Transformation. Wie sich im vorigen Kapitel gezeigt hat, erfüllen Mehrgrößensysteme diese Bedingungen im Allgemeinen nicht.

Ein Aufweiten der Zielform, insbesondere der Ausgangsabbildung in der Normalform, resultiert in weniger restriktiven Bedingungen zur Transformation. Dieses Vorgehen ist in [47] vorgeschlagen und in [48] erweitert worden. Obwohl das Verfahren zur Bestimmung eines lokalen Beobachters ausgelegt ist, lässt sich der Gültigkeitsbereich bei manchen Systemen bis zum kompletten Arbeitsraum aufweiten. Auch dieses Verfahren basiert auf der Transfor-

mation des Systems in geeignete Koordinaten.

**Definition 6 (Erweiterte nichtlineare Beobachternormalform,[48])** Die erweiterte nichtlineare Beobachternormalform für Mehrgrößensysteme besteht aus einem linearen Teil und einem nichtlinearen additiven Term, der ausschließlich von den Ausgangsgrößen des Systems abhängt

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{z} + \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{y}) + \mathbf{G}(\mathbf{y}) \cdot \mathbf{u}, \quad \mathbf{y} = \mathbf{h}(\mathbf{z}).$$

Dabei unterliegt die Ausgangsabbildung  $\mathbf{h} : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^p$  keiner Einschränkung, die konstante Matrix  $\mathbf{A}$  hingegen muss Hurwitz sein, d.h. sämtliche Eigenwerte besitzen einen negativen Realteil.  $\square$

In den transformierten Koordinaten ergibt sich der Beobachter dann trivial zu

$$\dot{\hat{\mathbf{z}}} = \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{z}} + \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{y}) + \mathbf{G}(\mathbf{y}) \cdot \mathbf{u}. \quad (4.55)$$

Die resultierende Fehlerdynamik ist auf Grund der Forderungen an die Matrix  $\mathbf{A}$  linear und asymptotisch stabil. Der Diffeomorphismus zum Wechsel der Zustandskoordinaten ergibt sich aus der partiellen Differentialgleichung

$${}^{enf}\mathbf{x} = {}^{enf}\mathbf{w}_{zrd}({}^{zrd}\mathbf{x}) \quad \frac{\partial {}^{enf}\mathbf{w}_{zrd}}{\partial {}^{zrd}\mathbf{x}^T}({}^{zrd}\mathbf{x}) \mathbf{f}_{\mathbf{x}} = \mathbf{A} {}^{enf}\mathbf{w}_{zrd}({}^{zrd}\mathbf{x}) - \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{h}({}^{zrd}\mathbf{x})). \quad (4.56)$$

Der Nachweis der Existenz und Eindeutigkeit der Lösung von Gleichung (4.56) und damit die Existenz einer Transformationsvorschrift ist in [48] ausgeführt. Der Beweis basiert auf dem Hilfssatz von Lyapunov. Es wird die Existenz einer lokalen Lösung um den Ursprung  ${}^{zrd}\mathbf{x} = \mathbf{0}$  nachgewiesen. Eine Konstruktionsvorschrift für diese Lösung wird jedoch nicht genannt, sondern nur die Konstruktion einer Näherungslösung, die für den relevanten Bereich die wahre Lösung hinreichend genau nachbildet. Obwohl die Lösung zunächst nur lokaler Natur ist, ist das Verfahren trotzdem für den Zweck der Reibungsschätzung relevant, falls der Gültigkeitsbereich groß genug ist.

Die Existenz der Lösung von Gleichung (4.56) um den Punkt  ${}^{zrd}\mathbf{x} = \mathbf{0}$  ist nach [48] gewährleistet, wenn der folgende Satz erfüllt ist.

**Satz 3 (Existenz der Transformationsvorschrift auf ENBNF ([48]))** Gegeben sind das System nach Gleichung (4.7) der Ordnung  $n_{\text{dof}}$  und die partielle Differentialgleichung (4.56). Die Vektorfelder  $\mathbf{f}_{\mathbf{x}}, \mathbf{h}_{\mathbf{x}}, \boldsymbol{\varphi}$  sind analytisch und ihr Wert an der Stelle  ${}^{zrd}\mathbf{x} = \mathbf{0}$  ist der Null-

vektor. Die Ableitung der Vektorfelder im Punkt Null ist

$$\mathbf{F} = \frac{\partial \mathbf{f}_{\mathbf{x}}}{\partial^{\text{zrd}} \mathbf{x}^T}, \quad \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{h}_{\mathbf{x}}}{\partial^{\text{zrd}} \mathbf{x}^T}, \quad \mathbf{B} = \frac{\partial \varphi}{\partial^{\text{zrd}} \mathbf{x}^T}.$$

Die partielle Differentialgleichung (4.56) besitzt eine eindeutige analytische Lösung  $^{\text{enf}}\mathbf{w}_{\text{zrd}}$ , wenn gilt

$$\begin{aligned} \exists \mathbf{T} \text{ mit } \mathbf{T}\mathbf{F} &= \mathbf{A}\mathbf{T} - \mathbf{B}\mathbf{H} \quad \text{mit } \mathbf{T} \in \mathbb{R}^{n \times n} \text{ regulär} \\ |\mu - \mathbf{m}^T \boldsymbol{\lambda}| &\geq \frac{C}{(\sum m_i)^v} \quad \forall \mathbf{m} \in (\mathbb{N} \setminus \{0\})^n, C > 0, v > 0, \end{aligned}$$

wobei  $\mu_i$  die Eigenwerte der Matrix  $\mathbf{A}$  und  $\lambda_i$  die Eigenwerte der Matrix  $\mathbf{F}$  sind. Die Lösung  $^{\text{enf}}\mathbf{w}_{\text{zrd}}$  ist ein lokaler Diffeomorphismus um  $^{\text{zrd}}\mathbf{x}=\mathbf{0}$ .  $\square$

Interessanterweise bezieht die Beurteilung den noch unbekannten additiven Term  $\varphi$  ein. Die Matrizen  $\mathbf{H}$  und  $\mathbf{F}$  müssen ein beobachtbares Paar bilden. Für diese Beurteilung wird das Kalmankriterium herangezogen, und der Rang der Beobachtbarkeitsmatrix geprüft

$$\mathbf{Q}_B = \begin{bmatrix} \mathbf{H}\mathbf{F}^0 \\ \vdots \\ \mathbf{H}\mathbf{F}^{n-1} \end{bmatrix} \quad \text{Rang}(\mathbf{Q}_B) = n.$$

Die Restriktionen, die sich aus den Bedingungen an die Eigenwerte der Matrizen ergeben, schränken die Lösbarkeit kaum ein. Die in Satz 3 zusammengefassten Bedingungen für die Existenz einer Transformation sind wesentlich geringer als diejenigen des vorigen Kapitels. Der Satz liefert jedoch auch nur eine Aussage über die Existenz einer lokalen Lösung um den Koordinatenursprung der Zustände, demnach ist der Diffeomorphismus ebenfalls lokal in einer Umgebung um den Ursprung. Über die Größe des Definitionsbereiches in  $\mathcal{M}$  ist keine Aussage getroffen. Der daraus konstruierte Beobachter unterliegt den gleichen Einschränkungen, er gilt zunächst nur im Arbeitspunkt. Der Gültigkeitsbereich ist bei diesem Beobachter stark mit der angenommenen Nichtlinearität verknüpft. Die Nichtlinearität ist dabei nicht Bestandteil der Lösung des Problems, d. h. im Prinzip kann für jede nichtlineare Abbildung  $\varphi$ , die den Anforderungen aus Satz 3 gerecht wird, eine Koordinatentransformation gefunden werden, die den Entwurf eines lokalen Arbeitspunktbeobachters ermöglicht.

Die Forderung an die Eigenwerte der Matrix ist von geringer Einschränkung. In erster Linie schließt sie Eigenwerte für die Matrix  $\mathbf{A}$  aus, die sich gemäß der folgenden Vorschrift  $\sum m_i \lambda_i$ ,  $m_i \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$  erzeugen lassen. Da die Menge der zulässigen Eigenwerte für  $\mathbf{A}$  ab einer gewissen Schwelle von  $v$  dicht in  $\mathbb{C}$  ist, sind die Einschränkungen an die Fehlerdynamik, die durch die Eigenwerte von  $\mathbf{A}$  bestimmt ist, quasi nicht existent.

**Beispiel 3** Gegeben ist der Vektor  $\boldsymbol{\lambda} = [2, 3]^T$ . In diesem Fall scheiden alle natürlichen Zahlen  $n \geq 5$  für  $\mu$  aus, da sie sich stets als Kombination darstellen lassen, und dann mindestens ein Vektor  $\mathbf{m}$  existiert, für den  $|\mu - \mathbf{m}^T \boldsymbol{\lambda}| = 0$  ist

$$\begin{aligned} \mu_1 &= 5, \quad \mu_n = 2 \cdot m_1 + 3 \cdot m_2 \\ \Rightarrow \mu_{n+1} &= 2 \cdot m_1 + 3 \cdot m_2 + 1 = \begin{cases} 2 \cdot (m_1 - 1) + 3 \cdot (m_2 + 1) & : m_1 > 1 \\ 2 \cdot 2 + 3 \cdot (m_2 - 1) & : m_1 = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Hingegen ist die Menge  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{N}$  als Lösung zulässig. Kann  $\mu$  nicht direkt erzeugt werden, besteht die Möglichkeit, dass der Term für  $|\mathbf{m}| \rightarrow \infty$  gegen Null strebt. Es ist dann zu prüfen, ob die geforderte Bedingung beim Grenzwert gültig bleibt. So ist bei der Kombination

$$\boldsymbol{\lambda} = [\sqrt{6}, \sqrt{3}]^T, \mu_1 = \sqrt{3} \Rightarrow m_1 \lambda_1 - m_2 \lambda_2 = 0, m_1 \neq 0 \Rightarrow \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}} = \sqrt{2} = \frac{m_2}{m_1}.$$

die letzte Gleichung auf Grund der Irrationalität der Zahlen erst im Unendlichen erfüllt, strebt dann aber gegen Null. Angenommen es gäbe eine beste Kombination  $m_1, m_2$

$$\sqrt{2} - \frac{m_2}{m_1} = k, \Rightarrow 0 < \frac{q_2}{q_1} < |k| \Rightarrow \left| \sqrt{2} - \frac{m_2 q_1 + m_1 q_2}{m_1 q_1} \right| < |k| \vee \left| \sqrt{2} - \frac{m_2 q_1 - m_1 q_2}{m_1 q_1} \right| < |k|.$$

Die Annahme führte zum Widerspruch, daher gilt die Annäherung im Unendlichen. Bei entsprechend großem Exponenten  $v$  strebt die rechte Seite der Ungleichung aus Satz 3 schneller gegen Null, so dass eine Konstante  $C$  existiert.  $\square$

### 4.5.1 Beobachtung der Coulombschen Reibung

Der Entwurf des Beobachters durch die erweiterte nichtlineare Beobachternormalform erfolgt zunächst für ein System mit ausschließlich Coulombscher Reibung. Der angestrebte Verwendungszweck des Beobachters, nämlich die Reibungsdetektion im Arbeitsraum, lässt einen Beobachter im Arbeitspunkt, wie er durch Satz 3 beschrieben ist, eher ungeeignet erscheinen. Da die Reibung nur bei Geschwindigkeiten ungleich Null in den betreffenden Gelenken detektierbar ist, siehe Abschnitt 4.2, existiert kein konstanter Arbeitspunkt. Daher ist ein entsprechend großer Gültigkeitsbereich der Transformation wünschenswert.

Zunächst werden die Bedingungen um den Punkt  ${}^{zrd} \mathbf{x} = \mathbf{o}$  geprüft. Die partiellen Ablei-

tungen des Driftfeldes und der Ausgangsabbildung müssen ein beobachtbares Paar ergeben

$$\frac{\partial^{zrd} \mathbf{f}_x}{\partial^{zrd} \mathbf{x}^T}(\mathbf{o}) = \begin{bmatrix} \mathbf{o} & \mathbf{I} & \mathbf{o} \\ \frac{\partial^{zrd} \mathbf{f}_{x,2}}{\partial^{zrd} \mathbf{x}_1^T} & \frac{\partial^{zrd} \mathbf{f}_{x,2}}{\partial^{zrd} \mathbf{x}_2^T} & \frac{\partial^{zrd} \mathbf{f}_{x,2}}{\partial^{zrd} \mathbf{x}_3^T} \\ \mathbf{o} & \mathbf{o} & \mathbf{o} \end{bmatrix}(\mathbf{o}), \quad \frac{\partial^{zrd} \mathbf{h}_x}{\partial^{zrd} \mathbf{x}^T}(\mathbf{o}) = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{o} & \mathbf{o} \\ \mathbf{o} & \mathbf{I} & \mathbf{o} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Q}_B = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{o} & \mathbf{o} \\ \mathbf{o} & \mathbf{I} & \mathbf{o} \\ \mathbf{o} & \mathbf{I} & \mathbf{o} \\ \frac{\partial^{zrd} \mathbf{f}_{x,2}}{\partial^{zrd} \mathbf{x}_1^T} & \frac{\partial^{zrd} \mathbf{f}_{x,2}}{\partial^{zrd} \mathbf{x}_2^T} & \frac{\partial^{zrd} \mathbf{f}_{x,2}}{\partial^{zrd} \mathbf{x}_3^T} \end{bmatrix} \Rightarrow \text{Rang}(\mathbf{Q}_B) = 3n \text{ g.d.w. } \frac{\partial^{zrd} \mathbf{f}_{x,2}}{\partial^{zrd} \mathbf{x}_3^T} \text{ regulär.}$$

Im obigen Fall ist bereits angenommen, dass sowohl Geschwindigkeit als auch Position, repräsentiert durch die Zustandskoordinaten  $^{zrd} \mathbf{x}_1, ^{zrd} \mathbf{x}_2$ , messbar sind. Die Matrix verändert sich jedoch nicht, falls nur Positionskoordinaten zur Verfügung stehen. Diese Bedingung ähnelt der generellen Beobachtbarkeitsbedingung, nur dass hier die Ableitungen im Arbeitspunkt betrachtet werden. Damit wird die lokale Invertierbarkeit der Funktionen sichergestellt. Die Bedingung ist strenger als die Invertierbarkeit der Funktion, und daher separat geprüft. Problematisch bei obiger Rechnung ist der Arbeitspunkt, da die Reibung bei Geschwindigkeit Null undefiniert und unstetig ist. Die zweite Bedingung ist erst nach Festlegung des additiven Terms  $\varphi$  prüfbar. Für den Sonderfall  $\mathbf{T} = \mathbf{I}$  ergibt sich der Identitätsbeobachter mit der aus dem linearen Fall bekannten Auslegung

$$\mathbf{IF} = \mathbf{AI} + \mathbf{BH} \Leftrightarrow \mathbf{A} = \mathbf{F} - \mathbf{BH},$$

mit der Beobachterdynamik  $\mathbf{A}$  und der Beobacherverstärkung  $\mathbf{B}$ .

Zum Finden einer Transformation im vorliegenden Fall wird die partielle Differentialgleichung (4.56) betrachtet

$$\nabla^{enf} \mathbf{w}_{zrd} ^{zrd} \mathbf{f}_x = \mathbf{A}^{enf} \mathbf{w}_{zrd} + \varphi. \quad (4.57)$$

Die Gleichung ist zunächst losgelöst von den Eingangsgrößen. Da das System eingangslinier ist, sind diese anschließend in die Lösung integrierbar. Bei Gleichung (4.57) handelt es sich um eine lineare partielle Differentialgleichung. In nicht vektorieller Schreibweise ergibt sich die Summenform

$$\nabla^{enf} \mathbf{w}_{zrd} ^{zrd} \mathbf{f}_x = \mathbf{v} \Leftrightarrow \sum \frac{\partial^{enf}(w_r)_{zrd}}{\partial^{zrd} x_i} ^{zrd} f_{x,i} = v_r. \quad (4.58)$$

Systeme partieller Differentialgleichungen dieser Art sind in [49] als Differentialgleichungen



mit gleichem Hauptteil charakterisiert. Ihre Lösung kann auf die Lösung gewöhnlicher Differentialgleichungen zurückgeführt werden

$$\frac{d^{zrd} x_c}{ds} = {}^{zrd} f_{x,i} \quad (c = 1, \dots, n) \quad \frac{d^{enf} (w_r)_{zrd}}{ds} = v_r \quad (r = 1, \dots, n). \quad (4.59)$$

Die Lösung der nichtlinearen Gleichungen erfordert die Lösung der allgemeinen Differentialgleichung des Systems, in den Ableitungen der Zustandsgrößen steckt die ursprüngliche Differentialgleichung des Systems, siehe Gleichung (4.5). Die Transformation auf das äquivalente System vereinfacht daher die Lösung erst einmal nicht. Daher wird im Folgenden nach der direkten Lösung der Gleichung gesucht. Gemäß der Struktur des Driftfeldes wird die Gleichung zunächst aufgeteilt

$$\frac{\partial^{enf} \mathbf{w}_{zrd}}{\partial {}^{zrd} \mathbf{x}_1^T} {}^{zrd} \mathbf{x}_2 + \frac{\partial^{enf} \mathbf{w}_{zrd}}{\partial {}^{zrd} \mathbf{x}_2^T} \underbrace{{}^{zrd} \mathbf{f}_{x,2}}_{\overline{M_q^{-1} (-C_q {}^{zrd} \mathbf{x}_2 - \mathbf{g}_q + \sigma \mathbf{J}_q^T {}^{zrd} \mathbf{x}_3)}} = \mathbf{A}^{enf} \mathbf{w}_{zrd} + \boldsymbol{\varphi}. \quad (4.60)$$

Als Ansatz zur Lösung wird das Separationsprinzip eingesetzt, wobei auch hier die Gruppierung der Zustandsgrößen aufrecht erhalten bleibt. Dabei ist zu beachten, dass dieser Ansatz nicht automatisch die Gesamtheit aller Lösungen liefert [49],

$$\begin{aligned} {}^{enf} \mathbf{w}_{zrd} &= \boldsymbol{\psi}_1({}^{zrd} \mathbf{x}_1) + \boldsymbol{\psi}_2({}^{zrd} \mathbf{x}_2) + \boldsymbol{\psi}_3({}^{zrd} \mathbf{x}_3) \\ \Rightarrow \nabla^{enf} \mathbf{w}_{zrd} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial \boldsymbol{\psi}_1}{\partial {}^{zrd} \mathbf{x}_1^T} & \frac{\partial \boldsymbol{\psi}_2}{\partial {}^{zrd} \mathbf{x}_2^T} & \frac{\partial \boldsymbol{\psi}_3}{\partial {}^{zrd} \mathbf{x}_3^T} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\psi}'_1 & \boldsymbol{\psi}'_2 & \boldsymbol{\psi}'_3 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (4.61)$$

Mit diesem Ansatz in Gleichung (4.60) kann die Lösung angegangen werden. Dabei wird der additive nichtlineare Term noch nicht näher bestimmt. Einzig seine Abhängigkeit von den Messgrößen ist festgelegt

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\psi}'_1({}^{zrd} \mathbf{x}_1) {}^{zrd} \mathbf{x}_2 + \boldsymbol{\psi}'_2({}^{zrd} \mathbf{x}_2) \mathbf{M}_q^{-1} (-\mathbf{C}_q {}^{zrd} \mathbf{x}_2 - \mathbf{g}_q + \sigma \mathbf{J}_q^T {}^{zrd} \mathbf{x}_3) = \\ \mathbf{A} (\boldsymbol{\psi}_1({}^{zrd} \mathbf{x}_1) + \boldsymbol{\psi}_2({}^{zrd} \mathbf{x}_2) + \boldsymbol{\psi}_3({}^{zrd} \mathbf{x}_3)) + \boldsymbol{\varphi}({}^{zrd} \mathbf{x}_1, {}^{zrd} \mathbf{x}_2). \end{aligned} \quad (4.62)$$

Die rechte Seite bietet keinen Term der Form  $\boldsymbol{\psi}'_2({}^{zrd} \mathbf{x}_2) \mathbf{M}_q^{-1} \mathbf{C}_q {}^{zrd} \mathbf{x}_2$ , so dass ohne konkrete Forderungen an das System, die einzige Lösung  $\boldsymbol{\psi}'_2 = \mathbf{0}$  ist. Damit ist auch  $\boldsymbol{\psi}_3$  als konstanter Vektor festgelegt. Die resultierende Transformation lautet

$${}^{enf} \mathbf{w}_{zrd} = \boldsymbol{\psi}_1 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{\psi}'_1 {}^{zrd} \mathbf{x}_2 - \mathbf{A} \boldsymbol{\psi}_1({}^{zrd} \mathbf{x}_1).$$

Da die Lösung jedoch nicht alle Zustandsgrößen enthält und daher nicht invertierbar ist, ist die Zustandstransformation wertlos. Eine Abbildung in einen niederdimensionaleren Raum

würde Informationen verlieren. Der Ansatz liefert jedoch die Erkenntnis, dass ein Summand  $\psi_1(\mathbf{x}_1^{zrd})$  der Lösung stets überlagert werden kann, da er Lösung der Differentialgleichung ist. Durch die Hinzunahme weiterer Terme kann nun versucht werden eine Lösung zu konstruieren, die alle Zustände enthält und auf einem gewissen Bereich invertierbar ist. In diesem Definitionsbereich existiert dann ein Beobachter nach Definition 6.

Die vollständige Trennung der Zustände liefert keine brauchbare Lösung der partiellen Differentialgleichung. Entscheidend für die Lösung sind diejenigen Terme, die die unter  $\mathbf{x}_3^{zrd}$  zusammengefassten Zustandsgrößen enthalten. Diese lassen sich nicht ohne weiteres im additiven Term in den transformierten Koordinaten zusammenfassen. Um die noch fehlenden Zustände in die Lösung aufzunehmen bleibt zu prüfen, ob ein Term der Form

$$\mathbf{w}_{zrd}^{enf} = \psi_{23}(\mathbf{x}_2^{zrd}, \mathbf{x}_3^{zrd}) \Rightarrow \nabla \mathbf{w}_{zrd}^{enf} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \frac{\partial \psi_{23}}{\partial \mathbf{x}_2^{zrd\top}} & \frac{\partial \psi_{23}}{\partial \mathbf{x}_3^{zrd\top}} \end{bmatrix} \quad (4.63)$$

Lösung der Differentialgleichung ist. Eingesetzt in Gleichung (4.57) kann dies auf die Lösung des Problems

$$\frac{\partial \psi_{23}}{\partial \mathbf{x}_2^{zrd\top}} \mathbf{M}_q^{-1} (-\mathbf{C}_q \mathbf{x}_2^{zrd} - \mathbf{g}_q + \boldsymbol{\sigma} \mathbf{J}_q^\top \mathbf{x}_3^{zrd}) = \mathbf{A} \psi_{23} + \boldsymbol{\varphi} \quad (4.64)$$

heruntergebrochen werden. Durch die Multiplikation der Ableitung mit dem Driftfeld entstehen auf der linken Seite der Gleichung Terme, die von allen Zustandsgrößen abhängig sind. Die rechte Seite beinhaltet jedoch nur additive Komponenten mit einzelnen Kombinationen der Zustandsgrößen. Es lässt sich jedoch keine Funktion  $\psi_{23}$  finden, welche obige Gleichung löst: Ohne das System zu beschränken, können die Abhängigkeiten von  $\mathbf{x}_1^{zrd}$  auf der linken Seite nicht entfernt werden. Da kein korrespondierender Term auf der rechten Seite existiert, bleibt nur die Elimination von  $\mathbf{x}_3^{zrd}$  auf der linken Seite. Dies erfordert jedoch ebenfalls die Abhängigkeit von  $\mathbf{x}_1^{zrd}$ , so dass ein Widerspruch zum Ansatz entsteht. Ein Ansatz mit

$$\psi_{13}(\mathbf{x}_1^{zrd}, \mathbf{x}_3^{zrd}) \Rightarrow \nabla \mathbf{w}_{zrd}^{enf} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \psi_{13}}{\partial \mathbf{x}_1^{zrd\top}} & \mathbf{0} & \frac{\partial \psi_{13}}{\partial \mathbf{x}_3^{zrd\top}} \end{bmatrix} \quad (4.65)$$

scheitert aus ähnlichen Gründen. Durch die Multiplikation mit dem Driftfeld entsteht auch hier ein Term auf der rechten Seite, der von allen Zustandsgrößen abhängig ist. Die letzte mögliche Kombination zweier Zustandsgrößen ist

$$\psi_{12}(\mathbf{x}_1^{zrd}, \mathbf{x}_2^{zrd}) \Rightarrow \nabla \mathbf{w}_{zrd}^{enf} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \psi_{12}}{\partial \mathbf{x}_1^{zrd\top}} & \frac{\partial \psi_{12}}{\partial \mathbf{x}_2^{zrd\top}} & \mathbf{0} \end{bmatrix}. \quad (4.66)$$

Die Multiplikation mit dem Driftfeld liefert bis auf einen Fall ausschließlich Terme, die nur von  $\mathbf{x}_1^{zrd}$ ,  $\mathbf{x}_2^{zrd}$  abhängig sind und daher vom additiven Term erzeugt werden können. Mit

der Zustandsgröße  ${}^{zrd}\mathbf{x}_2$  verbleibt der Term

$$\frac{\partial \psi_{12}}{\partial {}^{zrd}\mathbf{x}_2^T} \mathbf{M}_q^{-1} (\boldsymbol{\sigma} \mathbf{J}_q^T {}^{zrd}\mathbf{x}_3) = \mathbf{A} \psi_{12} + \boldsymbol{\varphi}. \quad (4.67)$$

Auch in diesem Fall existiert keine Funktion, welche die Gleichung erfüllen kann. Der Rückblick auf den Separationsansatz in Gleichung (4.62) zeigt, dass der Term  $\psi_3$  auf der linken Seite nicht auftaucht und daher verwendet werden kann, um beliebige Funktionen in  ${}^{zrd}\mathbf{x}_3$  auf der rechten Seite zu erzeugen. Damit ergibt sich als Ansatz

$$\boldsymbol{\psi} = \psi_{12} + \psi_3 \Rightarrow \nabla \boldsymbol{\psi} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \psi_{12}}{\partial {}^{zrd}\mathbf{x}_1^T} & \frac{\partial \psi_{12}}{\partial {}^{zrd}\mathbf{x}_2^T} & \psi_3 \end{bmatrix}. \quad (4.68)$$

In Gleichung (4.60) eingesetzt folgt daraus

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi_{12}}{\partial {}^{zrd}\mathbf{x}_1^T} {}^{zrd}\mathbf{x}_2 + \frac{\partial \psi_{12}}{\partial {}^{zrd}\mathbf{x}_2^T} \mathbf{M}_q^{-1} (-\mathbf{C}_q {}^{zrd}\mathbf{x}_2 - \mathbf{g}_q + \boldsymbol{\sigma} \mathbf{J}_q^T {}^{zrd}\mathbf{x}_3) &= \mathbf{A} \psi_{12} + \mathbf{A} \psi_3 + \boldsymbol{\varphi} \\ \Rightarrow \frac{\partial \psi_{12}}{\partial {}^{zrd}\mathbf{x}_2^T} \mathbf{M}_q^{-1} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{J}_q^T {}^{zrd}\mathbf{x}_3 &= \mathbf{A} \psi_3 \Rightarrow \frac{\partial \psi_{12}}{\partial {}^{zrd}\mathbf{x}_2^T} \mathbf{M}_q^{-1} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{J}_q^T \wedge \psi_3. \end{aligned}$$

Aus den so gefundenen Teillösungen lässt sich die Gesamtlösung komponieren, gleichzeitig legt dies auch den additiven Term  $\boldsymbol{\varphi}$  fest. Als offener Auslegungsparameter ist die Beobachtermatrix  $\mathbf{A}$  in den Gleichungen vorhanden

$${}^{enf}\mathbf{w}_{zrd} = \psi_1({}^{zrd}\mathbf{x}_1) + \psi_{12}({}^{zrd}\mathbf{x}_1, {}^{zrd}\mathbf{x}_2) + \psi_3({}^{zrd}\mathbf{x}_3) \quad (4.69a)$$

$$\boldsymbol{\varphi} = \frac{\partial \psi_1 + \psi_{12}}{\partial {}^{zrd}\mathbf{x}_1^T} {}^{zrd}\mathbf{x}_2 - \frac{\partial \psi_{12}}{\partial {}^{zrd}\mathbf{x}_2^T} \mathbf{M}_q^{-1} (\mathbf{C}_q {}^{zrd}\mathbf{x}_2 + \mathbf{g}_q) - \mathbf{A}(\psi_1 + \psi_{12}) \quad (4.69b)$$

$$\psi_{12} = \mathbf{K}_2 \boldsymbol{\sigma} \mathbf{J}_q^{-T} \mathbf{M}_q {}^{zrd}\mathbf{x}_2, \quad \psi_3 = \mathbf{K}_3 {}^{zrd}\mathbf{x}_3.$$

Die Matrizen  $\mathbf{K}_2, \mathbf{K}_3, \mathbf{A}$  sind nicht unabhängig voneinander. Es gilt der Zusammenhang

$$\mathbf{A} \mathbf{K}_3 = \mathbf{K}_2. \quad (4.70)$$

### Invertierbarkeit und Differenzierbarkeit der Transformation

Nach Festlegung der Transformation und des additiven Terms können alle Bedingungen aus Definition 6 überprüft werden. Die Transformationsvorschrift nach Gleichung (4.69) enthält sämtliche Zustandsgrößen und ist damit formal ein Kandidat für eine Koordinatentransformation. Damit die Vorschrift ein Diffeomorphismus ist, muss ihre Differenzierbarkeit und die Differenzierbarkeit ihrer Umkehrung geprüft werden. Die Differenzierbarkeit der Komponenten  $\psi_1, \psi_3$  ist offensichtlich bzw. die Funktion  $\psi_1$  kann entsprechend gewählt werden. Da  $\psi_2$

sich aus den Matrizen des mechanischen Systems zusammensetzt ist auch hier die Glattheit der Funktionen sichergestellt. Einzig singuläre Positionen können dabei problematisch sein. Zur Invertierung des Systems, wird dieses zunächst wieder blockweise aufgeschrieben

$$\begin{aligned}
 \psi_{1,1} + \mathbf{K}_{2,1} \mathbf{M}_q^\sigma \mathbf{J}_q^{-T} {}^{zrd} \mathbf{x}_2 + \mathbf{K}_{3,1} {}^{zrd} \mathbf{x}_3 &= {}^{enf} \mathbf{x}_1 \\
 \psi_{1,2} + \mathbf{K}_{2,2} \mathbf{M}_q^\sigma \mathbf{J}_q^{-T} {}^{zrd} \mathbf{x}_2 + \mathbf{K}_{3,2} {}^{zrd} \mathbf{x}_3 &= {}^{enf} \mathbf{x}_2 \\
 \psi_{1,3} + \mathbf{K}_{2,3} \mathbf{M}_q^\sigma \mathbf{J}_q^{-T} {}^{zrd} \mathbf{x}_2 + \mathbf{K}_{3,3} {}^{zrd} \mathbf{x}_3 &= {}^{enf} \mathbf{x}_3
 \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\}$$

$$\begin{aligned}
 \boldsymbol{\Upsilon}_{1,1} &= \mathbf{K}_{2,2} \mathbf{K}_{2,1}^{-1}, \quad \boldsymbol{\Upsilon}_{1,2} = \mathbf{K}_{2,3} \mathbf{K}_{2,1}^{-1} \\
 \psi_{1,2} - \boldsymbol{\Upsilon}_{1,1} \psi_{1,1} + \mathbf{K}_{3,2} {}^{zrd} \mathbf{x}_3 - \boldsymbol{\Upsilon}_{1,1} \mathbf{K}_{3,1} {}^{zrd} \mathbf{x}_3 &= {}^{enf} \mathbf{x}_2 - \boldsymbol{\Upsilon}_{1,1} {}^{enf} \mathbf{x}_1 \\
 \psi_{1,3} - \boldsymbol{\Upsilon}_{1,2} \psi_{1,1} + \mathbf{K}_{3,3} {}^{zrd} \mathbf{x}_3 - \boldsymbol{\Upsilon}_{1,2} \mathbf{K}_{3,1} {}^{zrd} \mathbf{x}_3 &= {}^{enf} \mathbf{x}_3 - \boldsymbol{\Upsilon}_{1,2} {}^{enf} \mathbf{x}_1 \\
 \boldsymbol{\Upsilon}_2 &= (\mathbf{K}_{3,3} - \boldsymbol{\Upsilon}_{1,2} \mathbf{K}_{3,1}) (\mathbf{K}_{3,2} - \boldsymbol{\Upsilon}_{1,1} \mathbf{K}_{3,1})^{-1} \\
 \psi_{1,3} - \boldsymbol{\Upsilon}_{1,2} \psi_{1,1} - \boldsymbol{\Upsilon}_2 (\psi_{1,2} - \boldsymbol{\Upsilon}_{1,1} \psi_{1,1}) &= {}^{enf} \mathbf{x}_3 - \boldsymbol{\Upsilon}_{1,2} {}^{enf} \mathbf{x}_1 - \boldsymbol{\Upsilon}_2 ({}^{enf} \mathbf{x}_2 - \boldsymbol{\Upsilon}_{1,1} {}^{enf} \mathbf{x}_1)
 \end{aligned}$$

Wenn die letzte Gleichung nach  ${}^{enf} \mathbf{x}_1$  auflösbar ist und die in den Zwischenschritten verwendeten Matrizen  $\boldsymbol{\Upsilon}_i$  existieren und vollen Rang besitzen, dann ist das Gleichungssystem invertierbar. Um diese Eigenschaften zu prüfen, sind auch Summen von Matrizen auf die Existenz ihrer Inversen zu prüfen. Im Gegensatz zum Produkt quadratischer Matrizen, welches genau dann regulär ist, wenn die Faktoren es sind, ist diese Aussage bei einer Summe generell nicht möglich. Die Beschränkung der beteiligten Matrizen auf eine bestimmte Matrixklasse erlaubt aber die Vorhersage der Entwicklung der Eigenwerte. Besitzen alle beteiligten Matrizen die selben Eigenvektoren, so können Aussagen über die Eigenwerte der Summenmatrix getroffen werden, siehe B. Die Kenntnis der Eigenwerte erlaubt die Beurteilung der Invertierbarkeit der Matrix, so dass mit Hilfe dieser Eigenschaft nach Lösungen gesucht werden kann. Da in den inversen Matrizen nur Submatrizen der Entwurfparameter vorkommen wird zunächst der gemeinsame Eigenraum der betrachteten Matrizen durch die Vorgabe von  $n_{dof}$  linear unabhängigen Eigenvektoren festgelegt

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_{e,1} & \dots & \mathbf{v}_{e,n_{dof}} \end{bmatrix} \quad \text{mit} \quad \sum_{i=1}^{n_{dof}} a_i \mathbf{v}_{e,i} = \mathbf{0} \Rightarrow a_1 = \dots = a_{n_{dof}} = 0. \quad (4.71)$$

Für die Betrachtung der Matrizen  $\boldsymbol{\Upsilon}_{1,1}, \boldsymbol{\Upsilon}_{1,2}$  sind die Komponenten der Matrix  $\mathbf{K}_2$  relevant. Mittels Festlegung der Eigenvektoren und -werte der Submatrizen von  $\mathbf{K}_2$  können dann die in Anhang B angegebenen Beziehungen genutzt werden. Mit den Eigenwerten

$$\Lambda_{\mathbf{W}}(\mathbf{K}_{2,1}) = \overset{[\mathbf{K}_{2,1}]}{\boldsymbol{\lambda}}, \quad \Lambda_{\mathbf{W}}(\mathbf{K}_{2,2}) = \overset{[\mathbf{K}_{2,2}]}{\boldsymbol{\lambda}}, \quad \Lambda_{\mathbf{W}}(\mathbf{K}_{2,3}) = \overset{[\mathbf{K}_{2,3}]}{\boldsymbol{\lambda}},$$

folgt dann mit den Korollars 7 und 8

$$\Lambda_{\mathbf{W}}(\boldsymbol{\Upsilon}_{1,1}) = \begin{matrix} [\boldsymbol{\Upsilon}_{1,1}] \\ \boldsymbol{\lambda} \end{matrix} = \begin{bmatrix} [\mathbf{K}_{2,2}] \begin{pmatrix} [\mathbf{K}_{2,1}] \\ \lambda_1 \end{pmatrix}^{-1} & \dots & [\mathbf{K}_{2,2}] \begin{pmatrix} [\mathbf{K}_{2,1}] \\ \lambda_{n_{dof}} \end{pmatrix}^{-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \end{bmatrix}$$

$$\Lambda_{\mathbf{W}}(\boldsymbol{\Upsilon}_{1,2}) = \begin{matrix} [\boldsymbol{\Upsilon}_{1,2}] \\ \boldsymbol{\lambda} \end{matrix} = \begin{bmatrix} [\mathbf{K}_{2,3}] \begin{pmatrix} [\mathbf{K}_{2,1}] \\ \lambda_1 \end{pmatrix}^{-1} & \dots & [\mathbf{K}_{2,3}] \begin{pmatrix} [\mathbf{K}_{2,1}] \\ \lambda_{n_{dof}} \end{pmatrix}^{-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \end{bmatrix}.$$

Aus den Gleichungen folgt, dass alle Teilmatrizen der Matrix  $\mathbf{K}_2$  regulär sein müssen. Da es sich dabei nur um Multiplikationen handelt, ist die Beschränkung auf Matrizen mit gleichen Eigenvektoren hier noch nicht wichtig, spielt aber bei der Betrachtung der Matrix  $\boldsymbol{\Upsilon}_2$  eine Rolle

$$\Lambda_{\mathbf{W}}\left((\mathbf{K}_{3,3} - \mathbf{K}_{2,3}\mathbf{K}_{2,1}^{-1}\mathbf{K}_{3,1}) \underbrace{(\mathbf{K}_{3,2} - \mathbf{K}_{2,2}\mathbf{K}_{2,1}^{-1}\mathbf{K}_{3,1})^{-1}}_{\substack{! \\ = \mathbf{I} \Leftrightarrow \mathbf{K}_{3,2} = \mathbf{I} + \mathbf{K}_{2,2}\mathbf{K}_{2,1}^{-1}\mathbf{K}_{3,1}}}\right) = \boldsymbol{\lambda}_{n_{dof}}^{[\boldsymbol{\Upsilon}_2]}.$$

Die Festlegung der zu invertierenden Matrix auf die Einheitsmatrix vereinfacht die Berechnungen im Folgenden. Diese Festlegung weicht von den vorangegangenen Beschreibungen der Matrizen leicht ab. Durch die Sonderrolle der Einheitsmatrix ist dies allerdings unproblematisch. Desweiteren habe die Matrix  $\mathbf{A}$  Blockdiagonalstruktur und die freie Vektorfunktion  $\boldsymbol{\psi}_{1,1}$  sei linear in  $^{zrd}\mathbf{x}_1$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{1,1} & \mathbf{A}_{1,2} & \mathbf{A}_{1,3} \\ \mathbf{o} & \mathbf{A}_{2,2} & \mathbf{A}_{2,3} \\ \mathbf{o} & \mathbf{o} & \mathbf{A}_{3,3} \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{\psi}_{1,1} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{1,1} \\ \mathbf{K}_{1,2} \\ \mathbf{K}_{1,3} \end{bmatrix} ^{zrd}\mathbf{x}_1.$$

Die durch  $\mathbf{A}$  repräsentierte Fehlerdynamik hat nach dem Entwurfskriterium nur Eigenwerte mit negativem Realteil, so dass alle Blockdiagonalmatrizen regulär sind. Auf Grund der Annahmen über  $\boldsymbol{\psi}_{1,1}$  kann die Bedingung an die letzte Zeile des Gleichungssystems formuliert werden: Die Matrix

$$\mathbf{K}_{1,3} - \boldsymbol{\Upsilon}_{1,2}\mathbf{K}_{1,1} - \boldsymbol{\Upsilon}_2(\mathbf{K}_{1,2} - \boldsymbol{\Upsilon}_{1,1}\mathbf{K}_{1,1}) \quad (4.72)$$

muss regulär sein. Mit diesen Vorgaben und den vorigen Beziehungen sowie Gleichung (4.70) lassen sich die Anforderungen an die Matrizen formulieren. Da die Matrix  $\mathbf{A}$  die Fehlerdynamik des Beobachters enthält, bleibt sie als Entwurfparameter in den Gleichungen erhalten.

Zunächst werden die Abhängigkeiten bzgl. der Matrix  $\mathbf{K}_2$  eliminiert

$$\Lambda_{\mathbf{W}} \mathbf{K}_{2,j} = \sum_{i=j}^3 \Lambda_{\mathbf{W}}(\mathbf{A}_{j,i}) \cdot \Lambda_{\mathbf{W}} \mathbf{K}_{3,i} \quad j = 1, 2, 3$$

Daraus lassen sich Bedingungen der Eigenwerte der Teilmatrizen von  $\mathbf{K}_3$  in Abhängigkeit der Matrix  $\mathbf{A}$  definieren. Da die Teilmatrizen zur Bildung der  $\mathbf{Y}_{1,i}$  verwendet werden, müssen alle Eigenwerte von Null verschieden sein. So muss  $\mathbf{K}_{3,3}$  regulär sein, für die beiden anderen Teilmatrizen ergibt sich aus den Eigenwerten

$$\Lambda_{\mathbf{W}} \mathbf{K}_{3,2} \neq \frac{\Lambda_{\mathbf{W}} \mathbf{A}_{2,3} \cdot \Lambda_{\mathbf{W}} \mathbf{K}_{3,3}}{\Lambda_{\mathbf{W}} \mathbf{A}_{2,2}} \quad \Lambda_{\mathbf{W}} \mathbf{K}_{3,1} \neq \frac{\sum_{i=2}^3 \Lambda_{\mathbf{W}} \mathbf{A}_{1,i} \cdot \Lambda_{\mathbf{W}} \mathbf{K}_{3,i}}{\Lambda_{\mathbf{W}} \mathbf{A}_{1,1}}. \quad (4.73)$$

Die Ungleichheit muss elementweise gelten, damit ist die Forderung nach regulären Hilfsmatrizen  $\mathbf{Y}_{1,i}$  gleich mit erfüllt, da diese sich aus dem Produkt ergeben. Für die Hilfsmatrix  $\mathbf{Y}_2$  lassen sich Bedingungen analog formulieren. Mit der Forderung, dass der zu invertierende Term der Einheitsmatrix entspricht, ergeben sich die Bedingungen wie folgt

$$\begin{aligned} \Lambda_{\mathbf{W}} \mathbf{I} &= \Lambda_{\mathbf{W}} \mathbf{K}_{3,2} - \frac{\Lambda_{\mathbf{W}} \mathbf{K}_{3,1} \cdot \sum_{i=2}^3 \Lambda_{\mathbf{W}} \mathbf{A}_{2,i} \cdot \Lambda_{\mathbf{W}} \mathbf{K}_{3,i}}{\sum_{i=1}^3 \Lambda_{\mathbf{W}} \mathbf{A}_{1,i} \cdot \Lambda_{\mathbf{W}} \mathbf{K}_{3,i}} \\ \Lambda_{\mathbf{W}} \mathbf{K}_{3,3} &\neq \frac{\Lambda_{\mathbf{W}} \mathbf{K}_{3,1} \cdot \Lambda_{\mathbf{W}} \mathbf{A}_{3,3} \cdot \Lambda_{\mathbf{W}} \mathbf{K}_{3,3}}{\sum_{i=1}^3 \Lambda_{\mathbf{W}} \mathbf{A}_{1,i} \cdot \Lambda_{\mathbf{W}} \mathbf{K}_{3,i}}, \end{aligned}$$

und aus der sich im letzten Schritt zur Lösung des Gleichungssystems ergebenden Matrix nach Gleichung (4.72) ergibt sich die folgende Bedingung, um die Invertierbarkeit des gesamten Systems zu gewährleisten

$$\begin{aligned} \Lambda_{\mathbf{W}} \mathbf{K}_{1,3} - \frac{\Lambda_{\mathbf{W}} \mathbf{A}_{3,3} \cdot \Lambda_{\mathbf{W}} \mathbf{K}_{3,3} \cdot \Lambda_{\mathbf{W}} \mathbf{K}_{1,1}}{\sum_{i=1}^3 \Lambda_{\mathbf{W}} \mathbf{A}_{1,i} \cdot \Lambda_{\mathbf{W}} \mathbf{K}_{3,i}} - \left( \Lambda_{\mathbf{W}} \mathbf{K}_{3,3} - \frac{\Lambda_{\mathbf{W}} \mathbf{K}_{3,1} \cdot \Lambda_{\mathbf{W}} \mathbf{A}_{3,3} \cdot \Lambda_{\mathbf{W}} \mathbf{K}_{3,3}}{\sum_{i=1}^3 \Lambda_{\mathbf{W}} \mathbf{A}_{1,i} \cdot \Lambda_{\mathbf{W}} \mathbf{K}_{3,i}} \right) \\ \left( \Lambda_{\mathbf{W}} \mathbf{K}_{1,2} - \frac{\Lambda_{\mathbf{W}} \mathbf{K}_{1,1} \cdot \sum_{i=2}^3 \Lambda_{\mathbf{W}} \mathbf{A}_{1,i} \cdot \Lambda_{\mathbf{W}} \mathbf{K}_{3,i}}{\sum_{i=1}^3 \Lambda_{\mathbf{W}} \mathbf{A}_{1,i} \cdot \Lambda_{\mathbf{W}} \mathbf{K}_{3,i}} \right). \quad (4.74) \end{aligned}$$

Die Darstellung bzgl. der Eigenwerte erlaubt eine einfache Beurteilung, ob sich Matrizen finden lassen, die die Bedingungen erfüllen. Es ist festzuhalten, dass die Invertierbarkeit der Koordinatentransformation in Gleichung (4.69) nicht von den Systemmatrizen abhängt und damit vom konkreten System unabhängig ist. Die Beschränkung der Matrix  $\mathbf{A}$  auf Diagonalgestalt bedingt, dass sich die die Fehlerdynamik bestimmenden Eigenwerte in den Diagonalelementen wiederfinden (Korollar 9). Die Invertierung der Abbildung ist unter allen getroffenen Einschränkungen möglich, so dass eine Lösung für das Problem existiert und die

Koordinatentransformation nach Gleichung (4.69) eine Umkehrung besitzt. Setzt man

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{3,1} &= \mathbf{K}_{3,2} = \mathbf{K}_{3,3}\mathbf{A}_{1,1} = \mathbf{A}_{1,2} = \mathbf{A}_{1,3} \quad \mathbf{A}_{2,2} = \mathbf{A}_{2,3} \\ \Lambda_{\mathbf{W}}\mathbf{K}_{3,3} &= \Lambda_{\mathbf{W}}\mathbf{I} - \frac{\Lambda_{\mathbf{W}}2\mathbf{A}_{2,2}}{\Lambda_{\mathbf{W}}3\mathbf{A}_{1,1}} \Rightarrow \Lambda_{\mathbf{W}}2\mathbf{A}_{2,2} \neq \Lambda_{\mathbf{W}}3\mathbf{A}_{1,1} \\ \Rightarrow \Lambda_{\mathbf{W}}\mathbf{K}_{3,3} &\neq \Lambda_{\mathbf{W}}\mathbf{I} - \frac{\Lambda_{\mathbf{W}}\mathbf{A}_{3,3}}{\Lambda_{\mathbf{W}}3\mathbf{A}_{1,1}} \Rightarrow \Lambda_{\mathbf{W}}\mathbf{A}_{3,3} \neq \Lambda_{\mathbf{W}}3\mathbf{A}_{1,1} \end{aligned}$$

so ist diese Bedingung stets erfüllt, solange die Beziehungen zwischen den Eigenwerten der Teilmatrizen eingehalten werden. Die Invertierbarkeit der noch übrigen Gleichungen ist durch die freie Wahl der Matrizen  $\mathbf{K}_{1,i}$  stets sichergestellt.

Die konkrete Umkehrung der Koordinatentransformation muss für die Lösung der Zustandsschätzeraufgabe durchgeführt werden. Sie erlaubt, in Verbindung mit ihrer Ableitung, den Entwurf des Beobachters in Originalkoordinaten bzw. die Rücktransformation der geschätzten Zustände in Originalkoordinaten. Da durch die obige Rechnung sichergestellt ist, dass Matrizen existieren, welche die Invertierung der Transformation erlauben, kann diese angegeben werden. Die Einschränkungen die vorher gemacht worden sind, um die Existenz der Lösung zu zeigen sind nun aufgehoben. Die Umkehrung der letzten Zeile des Gleichungssystems ist hier über die Definition einer Umkehrfunktion gegeben

$${}^{zrd}\mathbf{x}_1 = {}^{zrd}(\mathbf{w}_1)_{enf}({}^{enf}\mathbf{x}) = \chi({}^{enf}\mathbf{x}) \quad (4.75a)$$

$$\begin{aligned} {}^{zrd}\mathbf{x}_3 &= (\mathbf{K}_{3,2} - \mathbf{Y}_{1,1}\mathbf{K}_{3,1})^{-1} ({}^{enf}\mathbf{x}_2 - \mathbf{Y}_{1,1}{}^{enf}\mathbf{x}_1 - \boldsymbol{\psi}_{1,2} + \mathbf{Y}_{1,1}\boldsymbol{\psi}_{1,1}) \Big|_{{}^{zrd}\mathbf{x}_1} \\ &= {}^{zrd}(\mathbf{w}_3)_{enf}({}^{enf}\mathbf{x}) \end{aligned} \quad (4.75b)$$

$$\begin{aligned} {}^{zrd}\mathbf{x}_2 &= (\mathbf{K}_{2,1}\mathbf{M}_q^\sigma \mathbf{J}_q^{-T})^{-1} ({}^{enf}\mathbf{x}_1 - \boldsymbol{\psi}_{1,1} - \mathbf{K}_{3,1}{}^{zrd}\mathbf{x}_3) \Big|_{{}^{zrd}\mathbf{x}_3} \\ &= {}^{zrd}(\mathbf{w}_2)_{enf}({}^{enf}\mathbf{x}) \end{aligned} \quad (4.75c)$$

Die Differenzierbarkeit der Rücktransformation ist zum einen von der gewählten Funktion  $\boldsymbol{\psi}_1$ , der Massenmatrix und der Jakobimatrix abhängig. Letztere sind bis auf die singulären Stellungen unproblematisch. Die Funktion  $\boldsymbol{\psi}_1$  ist bei Festlegung der Koordinatentransformation entsprechend zu wählen.

Der Transfer des Beobachters in Originalkoordinaten erfordert die zeitliche Ableitung der Rücktransformation nach Gleichung (4.75). Diese ergibt sich durch Anwenden der Kettenregel auf die Transformation

$$\frac{d {}^{zrd}\hat{\mathbf{x}}}{dt} = \frac{\partial {}^{zrd}\mathbf{w}_{enf}({}^{enf}\hat{\mathbf{x}})}{\partial {}^{enf}\hat{\mathbf{x}}^T} \cdot \frac{d {}^{enf}\hat{\mathbf{x}}}{dt} = \frac{\partial {}^{zrd}\mathbf{w}_{enf}({}^{enf}\hat{\mathbf{x}})}{\partial {}^{enf}\hat{\mathbf{x}}^T} \cdot (\mathbf{A}{}^{enf}\hat{\mathbf{x}} + \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{y})), \quad (4.76)$$

die die Differentialgleichung des Beobachters in den Ursprungskoordinaten liefert. Die Ableitung der Gleichungen (4.75) nach den transformierten Größen lässt sich auf Grund der noch unbestimmten Funktion  $\psi_1$  nicht bis ins Letzte auflösen. Daher bleibt ihre Ableitung un- aufgelöst, ebenso wie die Ableitung der ersten Komponente der Koordinatentransformation  $\frac{\partial^{zrd}(\mathbf{w}_1)_{enf}}{\partial^{enf}\mathbf{x}^T}$ . Für die Ableitung der Rücktransformation der Zustände  $^{zrd}\mathbf{x}_2, ^{zrd}\mathbf{x}_3$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^{zrd}(\mathbf{w}_3)_{enf}}{\partial^{enf}\mathbf{x}^T} &= (\mathbf{K}_{3,2} - \boldsymbol{\Upsilon}_{1,1}\mathbf{K}_{3,1})^{-1} \left( \begin{bmatrix} -\boldsymbol{\Upsilon}_{1,1} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix} - \frac{\partial\psi_{1,2} \circ \boldsymbol{\chi}}{\partial^{enf}\mathbf{x}^T} + \boldsymbol{\Upsilon}_{1,1} \frac{\partial\psi_{1,1} \circ \boldsymbol{\chi}}{\partial^{enf}\mathbf{x}^T} \right) \\ \frac{\partial^{zrd}(\mathbf{w}_2)_{enf}}{\partial^{enf}\mathbf{x}^T} &= \frac{\partial(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{J}_q^T \mathbf{M}_q^{-1}) \circ \boldsymbol{\chi}}{\partial^{enf}\mathbf{x}^T} \left( \mathbf{I}_{n_f} \otimes \left( \mathbf{K}_{2,1} \left( ^{enf}\mathbf{x}_1 - \psi_{1,1} \circ \boldsymbol{\chi} - \mathbf{K}_{3,1} ^{zrd}(\mathbf{w}_3)_{enf} \right) \right) \right) + \\ &\quad \left( (\boldsymbol{\sigma}\mathbf{J}_q^T \mathbf{M}_q^{-1}) \circ \boldsymbol{\chi} \right) \mathbf{K}_{2,1} \left( \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} - \frac{\partial\psi_{1,1} \circ \boldsymbol{\chi} + \mathbf{K}_{3,1} ^{zrd}(\mathbf{w}_3)_{enf}}{\partial^{enf}\mathbf{x}^T} \right) \end{aligned}$$

Die verbleibenden Verkettungen der Funktionen lassen sich mittels Korollar 4 weiter auflösen. Sämtliche Verkettungen haben auf Grund der unbekannten Funktion  $\psi_1$  die Struktur  $\mathbf{X} \circ \boldsymbol{\chi}$ , wobei  $\mathbf{X}$  entweder eine Matrix oder ein Vektor abhängig von der Zustandsgröße  $^{zrd}\mathbf{x}_1$  ist. Dies erlaubt die Überprüfung der Differenzierbarkeit der Umkehrabbildung. Diese Eigenschaft ist Voraussetzung, damit  $^{enf}\mathbf{w}_{zrd}$  ein Diffeomorphismus und somit eine zulässige Transformation für den Beobachterentwurf ist

$$\frac{\partial \mathbf{X} \circ \boldsymbol{\chi}}{\partial^{enf}\mathbf{x}^T} = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial^{zrd}\mathbf{x}_1^T} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial^{enf}\mathbf{x}^T}. \quad (4.77)$$

Neben der Differenzierbarkeit der Funktion  $\boldsymbol{\chi}$  ist diese auch für die Funktion  $\psi_1$ , die Massen- und die Jakobimatrix gefordert. Letztere erfüllen das Kriterium auf Grund des physikalischen Hintergrunds, mit Ausnahme singulärer Posen. Die Funktionen  $\psi_1$  und damit auch  $\boldsymbol{\chi}$  sind frei wählbar. Die Forderung schränkt also nur die Auswahl der Kandidaten ein. Eine zulässige Kombination ergibt sich für eine lineare Funktion  $\psi_1$ . Wie Gleichung (4.74) zeigt, ergibt sich eine konstante Matrix, die an die Zustände auf der rechten Seite des Systems heranmultipliziert wird. Die daraus folgende Funktion  $\boldsymbol{\chi}$  ist daher ebenfalls linear in  $^{enf}\mathbf{x}$  und somit differenzierbar auf dem gesamten Definitionsbereich.

### Transformation der Eingangsgröße

Die bisherigen Betrachtungen haben ein autonomes System vorausgesetzt. Eingangsgrößen sind in den Überlegungen nicht berücksichtigt worden. Bei der Anwendung bei Robotern spielt dies jedoch eine entscheidende Rolle, da ansonsten die Eingänge als Störung auf die zu schätzende Größe wirken und das Resultat verfälschen. Für die Qualität der Zustandsschätzung ist die Einbeziehung der Eingangsgrößen daher von elementarer Bedeutung. Ausgehend



von der Zustandsraumdarstellung als autonomes System in den generalisierten Koordinaten bisher, kommen nun die Eingangsgrößen in Form der Antriebsmomente hinzu

$$\frac{d^{zrd}\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}_x + \mathbf{G}_x \boldsymbol{\tau}_d. \quad (4.78)$$

Die Applikation der Koordinatentransformation Gleichung (4.69) darf nicht die von Definition 6 geforderte Struktur verletzen. Für das transformierte System gilt

$$\frac{d^{enf}\mathbf{x}}{dt} = \frac{\partial^{enf}\mathbf{w}_{zrd}}{\partial^{zrd}\mathbf{x}^T} \cdot \frac{d^{zrd}\mathbf{x}}{dt} = \frac{\partial^{enf}\mathbf{w}_{zrd}}{\partial^{zrd}\mathbf{x}^T} \mathbf{f}_x + \frac{\partial^{enf}\mathbf{w}_{zrd}}{\partial^{zrd}\mathbf{x}^T} \mathbf{G}_x \boldsymbol{\tau}_d. \quad (4.79)$$

Die Eingangsgröße wirkt in generalisierten Koordinaten nur auf den Geschwindigkeitsterm, so dass die anderen Teilmatrizen von  $\mathbf{G}_x$  Nullmatrizen sind. Die partiellen Ableitungen der Koordinatentransformation werden damit ausgeblendet

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \frac{\partial^{enf}\mathbf{w}_{zrd}}{\partial^{zrd}\mathbf{x}_1^T} & \frac{\partial^{enf}\mathbf{w}_{zrd}}{\partial^{zrd}\mathbf{x}_2^T} & \frac{\partial^{enf}\mathbf{w}_{zrd}}{\partial^{zrd}\mathbf{x}_3^T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{o} & \mathbf{M}_q^{-1} & \mathbf{o} \end{bmatrix}^T &= \frac{\partial^{enf}\mathbf{w}_{zrd}}{\partial^{zrd}\mathbf{x}_2^T} \mathbf{M}_q^{-1} \\ &= \mathbf{A}\mathbf{K}_3 \boldsymbol{\sigma} \mathbf{J}_q^{-T} \mathbf{M}_q \mathbf{M}_q^{-1} = \mathbf{A}\mathbf{K}_3 \boldsymbol{\sigma} \mathbf{J}_q^{-T} = {}^{enf}\mathbf{G}. \end{aligned} \quad (4.80)$$

Die Matrix ergibt sich aus der Multiplikation der konstanten Matrizen der Entwurfparameter des Beobachters und der Jakobimatrix zu den reibbehafteten Freiheitsgraden. Damit ist sie ausschließlich von den Ausgangsgrößen des Systems abhängig und erfüllt die für den ENBNF geforderte Struktur aus Definition 6.

Das gesamte System inklusive Eingangsgrößen folgt daher in transformierten Koordinaten der Form

$$\frac{d^{enf}\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}^{enf}\mathbf{x} + \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{y}) + {}^{enf}\mathbf{G}(\mathbf{y})\boldsymbol{\tau}_d, \quad \mathbf{y} = {}^{enf}\mathbf{h}({}^{enf}\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} {}^{zrd}(\mathbf{w}_1)_{enf}({}^{enf}\mathbf{x}) \\ {}^{zrd}(\mathbf{w}_2)_{enf}({}^{enf}\mathbf{x}) \end{bmatrix} \quad (4.81)$$

In Gleichung (4.81) zeigt sich der wesentliche Unterschied der erweiterten Struktur im Vergleich zum Entwurf mittels NBNF. Die Ausgangsabbildung ist, verglichen mit der in Definition 5 geforderten Form, deutlich komplexer und hängt von sämtlichen Zuständen im transformierten Raum ab. Dies stellt deutlich geringere Anforderungen an die Koordinatentransformation, so dass in diesem Fall die Lösung möglich ist.

**Bemerkung 2** Die Kombination der Zustandsgrößen  ${}^{zrd}\mathbf{x}_2$  und  ${}^{zrd}\mathbf{x}_3$  führt bei der Multiplikation der Ableitung mit der Ausgangsabbildung zu einer Ausgangsabbildung in transformierten Koordinaten, die nicht mehr nur von den messbaren Größen abhängt und damit die Bedingungen von Definition 6 verletzt.  $\square$

### Reduzierte Ausgangsgrößen

Steht statt Geschwindigkeit und Position der Antriebe nur die Position zur Verfügung, führt die Koordinatentransformation nach Gleichung (4.69) nicht zur notwendigen Struktur der Differentialgleichung im Transformierten. Zwar ist die Eingangsmatrix  $^{enf}\mathbf{G}$  nur von der Position abhängig, die nichtlineare additive Funktion  $\varphi$  hängt jedoch zusätzlich von der Geschwindigkeit ab. Die Definition 6 sagt zwar die Existenz eines Beobachters auch in diesem Fall voraus, trifft jedoch keine Aussage über die Konstruktion und den Einzugsbereich. Eine Integration der partiellen Differentialgleichung ist global nicht möglich, so dass das Geschwindigkeitssignal für die Schätzung benötigt wird.

### Mehrere Freiheitsgrade

Die bisherigen Ausführungen setzen voraus, dass die Anzahl der zu schätzenden Reibzustände mit denen der generalisierten Koordinaten übereinstimmt. Die Jakobimatrix zu den reibbehafteten Gelenken muss invertierbar sein, sonst ist die in Gleichung (4.69) angegebene Funktion nicht umkehrbar und somit kein Diffeomorphismus. Daher ist sie als Koordinatentransformation unbrauchbar. Bei der Aufteilung der zusätzlichen Reibgrößen in separate Terme, wie in Abschnitt 4.2.3, zeigt, dass obiger Ansatz nicht zielführend ist. Bereits die Hinzunahme eines weiteren Terms führt zur partiellen Differentialgleichung

$$\begin{aligned} \nabla^{enf}\mathbf{w}_{zrd} \cdot {}^{zrd}\mathbf{f}_x &= \mathbf{A}^{enf}\mathbf{w}_{zrd} + \varphi(\mathbf{y}) \\ \text{mit } {}^{zrd}\mathbf{f}_{x,2} &= \mathbf{M}_q^{-1} \left( \sigma_1 \mathbf{J}_q^T {}^{zrd}\mathbf{x}_3 + \sigma_2 \mathbf{J}_q^T {}^{zrd}\mathbf{x}_4 - \mathbf{C}_q {}^{zrd}\mathbf{x}_2 - \mathbf{g}_q \right). \end{aligned} \quad (4.82)$$

Die gleichzeitige Kompensation beider Jakobimatrizen ist nicht möglich, so dass die Gleichung nicht integrierbar ist. Da dies die einzige Lösung war die sich im vorigen Kapitel gezeigt hat, folgt, dass die Hinzunahme weiterer Freiheitsgrade keinen Beobachter mit linearer Fehlerdynamik zulässt.

### Weniger Freiheitsgrade

Auch bei der Verwendung von weniger als  $n_{dof}$  Freiheitsgraden ist die Jakobimatrix nicht mehr quadratisch und somit zunächst nicht invertierbar. Im Gegensatz zu den im vorigen Absatz diskutierten Fall kann dieser Fall auch dann auftreten, wenn die eigentliche Aufgabe für  $n_{dof}$  Reibparameter definiert ist. Dies ist zum Beispiel der Fall, wenn die Jakobimatrix einen Rangverlust erleidet, oder die Schätzung auf Grund der Geschwindigkeit Null im Gelenk  $i$  ( ${}^{zrd}x_{2,i} = 0$ ) nicht möglich ist. In diesen Fällen reduziert sich die Anzahl der zu

schätzenden Größen, und die Jakobimatrix weist Rechteckform auf

$$\sigma \mathbf{J}_q^T \in \mathbb{R}^{n_{dof} \times m}, \text{ mit } m < n_{dof}. \quad (4.83)$$

Die Beschreibung des Systems im Zustandsraum ändert sich nicht, mit Ausnahme der nicht mehr quadratischen Matrix  $\sigma \mathbf{J}_q$ , siehe Gleichung (4.7). Formal kann daher die Koordinatentransformation nach Gleichung (4.69) erhalten bleiben. Anstelle der inversen Jakobimatrix, die im Fall reduzierter Koordinaten nicht existiert, wird die Moore-Penrose Pseudoinverse der Jakobimatrix angesetzt

$$\begin{aligned} {}^{enf} \mathbf{w}_{zrd} &= \psi_1({}^{zrd} \mathbf{x}_1) + \mathbf{A} \mathbf{K}_3 \sigma \mathbf{J}_q^{+T} \mathbf{M}_q {}^{zrd} \mathbf{x}_2 + \mathbf{K}_3 {}^{zrd} \mathbf{x}_3 \\ {}^{enf} \mathbf{w}_{zrd} &\in \mathbb{R}^{(2n_{dof}+m)} \quad \sigma \mathbf{J}_q^{+T} = \underbrace{(\sigma \mathbf{J}_q^T \sigma \mathbf{J}_q)^{-1}}_{m \times m} \sigma \mathbf{J}_q. \end{aligned} \quad (4.84)$$

Diese so gebildete Funktion ist zwar Lösung für die partielle Differentialgleichung, aber auf Grund der degenerierten Jakobimatrix nicht mehr invertierbar und ist daher kein Kandidat für eine Koordinatentransformation. Die Pseudoinverse in der obigen Form ist jedoch nicht die einzige Matrix, die die Anforderungen der Transformation erfüllt. Ziel ist es, dass das Produkt aus der noch unbekannten Matrix mit der transponierten Jakobimatrix  $\sigma \mathbf{J}_q^T$  eine konstante Matrix ergibt. Die Matrix selbst muss dabei invertierbar sein, damit die Lösung der Differentialgleichung auch als Koordinatentransformation verwendbar ist. Um eine Gleichförmigkeit der Lösung zu erhalten, muss die Lösung im Falle einer regulären Jakobimatrix ihrer Inversen entsprechen. Es ist folgende Matrix gesucht

$$\sigma \mathbf{J}_q^\circ \cdot \sigma \mathbf{J}_q^T = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_m \\ \mathbf{0}_{n_{dof}-m, m} \end{bmatrix}, \text{ mit } \sigma \mathbf{J}_q^\circ \in \mathbb{R}^{n_{dof} \times n_{dof}} \text{ regulär.} \quad (4.85)$$

BEWEIS (EXISTENZ DER MATRIX  $\sigma \mathbf{J}_q^\circ$ ) Sei  $\sigma \mathbf{J}_q^T \in \mathbb{R}^{n_{dof} \times m}$  eine rechteckige Matrix mit Rang  $m = \text{Rang}(\sigma \mathbf{J}_q^T)$ . Dann lässt sich die Matrix  $\sigma \mathbf{J}_q^T$  stets mit  $n_{dof} - m$  weiteren Spaltenvektoren zu einer regulären quadratischen Matrix  $\sigma \mathbf{J}_q^\square$  ergänzen. Die Inverse dieser Matrix  $(\sigma \mathbf{J}_q^\square)^{-1}$  besitzt die geforderten Eigenschaften von  $\sigma \mathbf{J}_q^\circ$ . Die Matrix  $\sigma \mathbf{J}_q^\circ$  ist nicht eindeutig

$$\begin{aligned} \sigma \mathbf{J}_q^T &= [\mathbf{v}_1 \quad \dots \quad \mathbf{v}_m], \quad \sigma \mathbf{J}_q^\square = [\sigma \mathbf{J}_q^T \quad |\mathbf{v}_{m+1} \quad \dots \quad \mathbf{v}_{n_{dof}}|] \\ \Rightarrow (\sigma \mathbf{J}_q^\square)^{-1} &= \begin{bmatrix} \mathbf{v}_{*,1}^T \\ \vdots \\ \mathbf{v}_{*,n_{dof}}^T \end{bmatrix} \Rightarrow \langle \mathbf{v}_{*,i}, \mathbf{v}_j \rangle \begin{cases} 1 & : i = j \\ 0 & : \text{sonst} \end{cases} \Rightarrow (\sigma \mathbf{J}_q^\square)^{-1} \sigma \mathbf{J}_q^T = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_m \\ \mathbf{0}_{n_{dof}-m, m} \end{bmatrix} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Die so konstruierte Matrix geht im Fall einer quadratischen, regulären Jakobimatrix  $\sigma \mathbf{J}_q^T$  in die Inverse über.

**Beispiel 4** Gegeben sei die  $2 \times 1$  Matrix  $\mathbf{V}$ , gesucht diejenige reguläre Matrix  $\mathbf{M}$ , die  $\mathbf{V}$  in die geforderte Form überführt

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{21} \end{bmatrix} \text{ mit } \mathbf{M}\mathbf{V} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{V}^\square = \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{M} := (\mathbf{V}^\square)^{-1}$$

$$\mathbf{M}\mathbf{V} = \frac{1}{\det(\mathbf{V}^\square)} \begin{bmatrix} v_{22} & -v_{12} \\ -v_{21} & v_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{21} \end{bmatrix} = \frac{1}{v_{11}v_{22} - v_{12}v_{21}} \begin{bmatrix} v_{11}v_{22} - v_{12}v_{21} \\ -v_{21}v_{11} + v_{11}v_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Aus den Gleichungen ergibt sich die Forderung  $\det(\mathbf{V}^\square) \neq 0 \Leftrightarrow v_{11}v_{22} \neq v_{12}v_{21}$ . Ist diese erfüllt, dann ist die Matrix regulär. Sie lässt jedoch eine Schar von Matrizen zu. Die Lösung ist nicht eindeutig.  $\square$

Mit den vorhergehenden Überlegungen bleibt die Transformationsvorschrift für Systeme mit geringerer Anzahl von gesuchten Parametern strukturell unverändert gültig. Weiterhin sind diejenigen Fälle abgedeckt, bei denen die einzelnen Größen auf Grund einer nicht vorhandenen Geschwindigkeit im betreffenden Gelenk, von der Schätzung ausgenommen werden müssen, oder die Matrix degeneriert. Der Rang der Lösung der partiellen Differentialgleichung ist maximal und die Koordinatentransformation damit umkehrbar. Bei der Invertierung der Transformation ist die fehlende Symmetrie in den Dimensionen zu beachten. Damit entfällt die blockweise Behandlung wie sie im obigen Kapitel praktiziert ist.

Beim Anpassen der Transformation im Betrieb spielen andere Faktoren eine Rolle. Die Matrix  $\mathbf{K}_3$  kann entsprechend durch Streichen einer Spalte und Zeile angepasst werden. Der Rang der Transformation ist dabei nicht gefährdet. Schwieriger ist das Anpassen der Matrix der linearen Beobachterdynamik  $\mathbf{A}$  und der daran gekoppelte additive nichtlineare Term  $\varphi$ . Da der fehlende Zustand kein direktes Äquivalent im Transformaten besitzt, kann das System nicht einfach modifiziert werden. Das neue reduzierte System muss dann entsprechend initialisiert werden. Das System hat dann in der ENBNF ebenfalls einen Zustand weniger. Entsprechend sind die Matrizen und Vektoren in der Transformation zu kürzen. Besitzt die Matrix der linearen Beobachterdynamik die Form einer linken oberen Dreiecksmatrix, so wie bei der Blockstruktur bereits angesetzt, so kann die Matrix eingekürzt werden, ohne die Eigenwerte zu verändern

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} e_1 & * & \cdots & * \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & e_{n-1} & * \\ 0 & \cdots & 0 & e_n \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{A}_{red} = \begin{bmatrix} e_1 & * & \cdots & * \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & e_{n-1} & * \\ 0 & \cdots & 0 & e_{n-1} \end{bmatrix}$$

Da sich die Änderungen der Dimension nur in den konstanten Matrizen der Transformation – mit Ausnahme der Funktion  $\psi_1$ , die aber linear gewählt werden kann – niederschlagen, ist die Neubestimmung des nichtlinearen additiven Terms ebenfalls mit wenig Aufwand verbunden. Sämtliche sich ändernden Matrizen können von der Differentiation isoliert werden, so dass die neue Funktion über Matrixmultiplikationen bzw. -additionen bestimmbar ist. Die Transformation bleibt weiterhin invertierbar, da eine komplette Zeile und Spalte eliminiert wird, so dass kein Rangabfall geschieht.

### Empfindlichkeit der Transformation

Die Koordinatentransformation weist neben der Wahl der Fehlerdynamik weitere Freiheitsgrade auf, die zur Optimierung genutzt werden können. Eine Möglichkeit besteht darin den additiven Term  $\varphi$  zu vereinfachen. Diese Möglichkeit kann sich durch die passende Wahl der Funktion  $\psi_1$  ergeben. Die Analyse des Terms in Gleichung (4.69) zeigt, dass die Kompensation an zwei Stellen theoretisch möglich ist: Für diejenigen Terme die entweder nur von  ${}^{zrd}\mathbf{x}_1$  abhängig oder linear in  ${}^{zrd}\mathbf{x}_2$  sind

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi_1}{\partial {}^{zrd}\mathbf{x}_1^T} {}^{zrd}\mathbf{x}_2 &= \mathbf{A} \mathbf{A} \mathbf{K}_3 {}^\sigma \mathbf{J}_q^{-T} \mathbf{M}_q {}^{zrd}\mathbf{x}_2 & \Rightarrow \frac{\partial \psi_1}{\partial {}^{zrd}\mathbf{x}_1^T} &= \mathbf{A}^2 \mathbf{K}_3 {}^\sigma \mathbf{J}_q^{-T} \mathbf{M}_q \\ & & \Rightarrow \frac{\partial \psi_1^*}{\partial {}^{zrd}\mathbf{x}_1^T} &= {}^\sigma \mathbf{J}_q^{-T} \mathbf{M}_q \\ \mathbf{A} \psi_1 &= \mathbf{A} \mathbf{K}_3 {}^\sigma \mathbf{J}_q^{-T} \mathbf{M}_q \mathbf{g}_q & \Rightarrow \psi_1 &= \mathbf{K}_3 {}^\sigma \mathbf{J}_q^{-T} \mathbf{M}_q \mathbf{g}_q. \end{aligned}$$

Die Kompensation des Gravitationsvektors ist also möglich, sofern die Wahl nicht die Invertierbarkeit der Koordinatentransformation gefährdet. Zudem ist es fraglich, ob die Auslöschung den gesamten Term tatsächlich vereinfacht, da in diesem Fall die Ableitung nach den Zuständen  ${}^{zrd}\mathbf{x}_1$  einen entsprechenden Term generiert. Die Kompensation des Terms linear in  ${}^{zrd}\mathbf{x}_1$  erfordert die Integrierbarkeit des obigen Ausdrucks. Der Jakobimatrix lässt sich zwar eine vektorielle Potentialfunktion zuordnen, dem Produkt aus Massenmatrix und inverser Jakobimatrix im Allgemeinen aber nicht. Die Kompensation kann daher höchstens für den Gravitationsterm erfolgen.

Ein anderer Ansatz ist eine möglichst ausgewogene Koordinatentransformation zu erreichen. Ziel ist es, eine möglichst gleichwertige Gewichtung der Zustände im Transformatierten zu erreichen. Da es bei Transformation keine direkte Zuordnung der Zustände oder Zustandsgruppen gibt, kann eine stark unterschiedliche Gewichtung der Zustände das Ergebnis, insbesondere bei endlicher Rechengenauigkeit, stören. Als Anhaltspunkt der Gewichtung dienen die Singulärwerte der Matrizen in der Transformationsvorschrift. Diese geben die größte mögliche Verstärkung eines Vektors bzgl. der 2-Norm an, siehe [50]. Da sich auf die Gewich-

tung der  $z^{rd}\mathbf{x}_1$  gezielt Einfluss nehmen lässt, ist insbesondere die Verkopplung der übrigen Zustandsgrößen interessant, also namentlich die Singulärwerte der Matrix  $\mathbf{A}\mathbf{K}_3\boldsymbol{\sigma}\mathbf{J}_q^{-T}\mathbf{M}_q$  im Vergleich zu  $\mathbf{K}_3$ . Da die Systemmatrizen durch das System gegeben sind und als Entwurfparameter ausfallen, beschränkt sich die Analyse der Singulärwerte auf die konstanten Matrizen. Ziel ist es demnach, dass  $\mathbf{A}\mathbf{K}_3$  und  $\mathbf{K}_3$  möglichst ähnliche Singulärwerte besitzen. Für die Abschätzung der Singulärwerte liefert Korollar 10 die notwendige Ungleichung.

Für die Betrachtung der Singulärwerte der Matrizen wird zunächst deren Zerlegung gemäß Definition 10 betrachtet

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}_A \boldsymbol{\Sigma}_A \mathbf{V}_A^T \quad \mathbf{K}_3 = \mathbf{U}_K \boldsymbol{\Sigma}_K \mathbf{V}_K^T.$$

Bei der Dekomposition der Matrix der linearen Fehlerdynamik  $\mathbf{A}$  gelte, dass die Singulärwerte in aufsteigender Reihenfolge, für die Matrix  $\mathbf{K}_3$  in absteigender Reihenfolge sortiert sind

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Sigma}_A &= \begin{bmatrix} \sigma_1(\mathbf{A}) & \dots & \sigma_{n_f}(\mathbf{A}) \end{bmatrix} & \boldsymbol{\Sigma}_K &= \begin{bmatrix} \sigma_1(\mathbf{K}_3) & \dots & \sigma_{n_{dof}}(\mathbf{K}_3) \\ \mathbf{0} & & \mathbf{0} \end{bmatrix} \\ \sigma_i(\mathbf{A}) &\leq \sigma_{i+1}(\mathbf{A}) & \sigma_i(\mathbf{K}_3) &\geq \sigma_{i+1}(\mathbf{K}_3) \end{aligned}$$

Unter der Annahme, dass das Matrixprodukt der beiden unitären Matrizen  $\mathbf{V}_A^T$  und  $\mathbf{U}_K$  die Einheitsmatrix ergibt, ergeben sich die Singulärwerte des Produkts von  $\mathbf{A}\mathbf{K}_3$  als Produkt der Singulärwerte. Durch die Beziehung mit Korollar 10 zeigt sich, dass dies die kleinst möglichen Eigenwerte des Produktes sind. Selbst in dieser idealen Kombination gilt, dass die Singulärwerte der Produktmatrix stets größer sind als die der Matrix  $\mathbf{K}_3$ . Ihr Unterschied ist allein durch die Matrix  $\mathbf{A}$  bestimmt, deren Eigenwerte und somit auch ihre Singulärwerte durch die gewünschte Konvergenzgeschwindigkeit bestimmt sind. Ungeachtet dessen, ob die oben angesetzte Multiplikation der unitären Matrizen tatsächlich die Einheitsmatrix ergibt, folgt aus obiger Analyse, dass die Singulärwerte der Matrizen  $\mathbf{A}$  und  $\mathbf{K}_3$  jeweils möglichst gleich sein sollten. Bei der Matrix  $\mathbf{A}$  stehen dazu die Eigenvektoren als Freiheitsgrad zur Verfügung. Damit das System eine gleichmäßige Konvergenz besitzt liegen die Eigenwerte der Matrix sinnvollerweise in einem engen Intervall, so dass dies der Forderung zuträglich ist. Der Einfluss der Systemmatrizen  $\mathbf{M}_q, \boldsymbol{\sigma}\mathbf{J}_q^{-T}$  ist in den vorangegangenen Überlegungen vernachlässigt worden. Ihre Multiplikation mit  $\mathbf{A}\mathbf{K}_3$  ändert zwar die Singulärwerte des Faktors vor  $z^{rd}\mathbf{x}_2$ , allerdings bleiben die Überlegungen bzgl. der Entwurfsvorschriften der beiden konstanten Matrizen weiter bestehen.

### 4.5.2 Beobachtung der geschwindigkeitsproportionalen Reibung

Der vorige Abschnitt 4.5.1 hatte die Beobachtung der Reibung als konstante Zustandsgröße modelliert. Die Beschreibung in Abschnitt 3.2.3 sieht jedoch zusätzlich die Beschreibung einer geschwindigkeitsproportionalen Komponente vor. Deren Einschluss in die Schätzung ermöglicht dann eine Verbesserung der Qualität des Beobachters, da diese Terme nicht der konstanten Reibung zugeschlagen werden. Die Analyse der Beobachtbarkeit hat zudem ergeben, dass diese Komponenten beobachtbar sind. Damit existiert zumindest ein Beobachter basierend auf hohen Verstärkungen. Der Entwurf mittels der ENBNF wird in diesem Abschnitt untersucht.

Zunächst wird dazu das System ohne die Coulombschen Anteile untersucht und analog wie in Abschnitt 4.5.1 angenommen, dass die Anzahl der zu schätzenden Freiheitsgrade denen der messbaren Koordinaten entspricht. Als Zustandsdifferentialgleichung ergibt sich daher das System

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} {}^{zrd}\mathbf{x}_1 \\ {}^{zrd}\mathbf{x}_2 \\ {}^{zrd}\mathbf{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^{zrd}\mathbf{x}_2 \\ \mathbf{M}_q^{-1} (\boldsymbol{\tau}_d - \mathbf{C}_q {}^{zrd}\mathbf{x}_2 - \mathbf{g}_q + {}^\sigma\mathbf{J}_q^T \text{diag}({}^{zrd}\mathbf{x}_3) {}^\sigma\mathbf{J}_q {}^{zrd}\mathbf{x}_2) \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (4.86a)$$

$$\mathbf{y} = {}^{zrd}\mathbf{h}({}^{zrd}\mathbf{x}_1, {}^{zrd}\mathbf{x}_2). \quad (4.86b)$$

Für den Entwurf eines Beobachters ist daher wieder ein Diffeomorphismus gesucht der das System nach Gleichung (4.86) in die von Definition 6 geforderte Form transformiert. Dazu muss die partielle Differentialgleichung

$$\nabla^{enf} \mathbf{w}_{zrd}({}^{zrd}\mathbf{x}) \cdot {}^{zrd}\mathbf{f}_x = \mathbf{A} \cdot {}^{enf}\mathbf{w}_{zrd}({}^{zrd}\mathbf{x}) + \boldsymbol{\varphi}({}^{zrd}\mathbf{x}_1, {}^{zrd}\mathbf{x}_2)$$

gelöst werden. In Analogie zur partiellen Differentialgleichung im vorigen Abschnitt, ist auch hier, durch den frei wählbaren additiven Term, die Funktion  $\boldsymbol{\psi}_1({}^{zrd}\mathbf{x}_1)$  eine zulässige Lösung der Differentialgleichung

$$\begin{aligned} \frac{\partial \boldsymbol{\psi}_1}{\partial {}^{zrd}\mathbf{x}_1^T} {}^{zrd}\mathbf{x}_2 &= \mathbf{A} \cdot {}^{enf}\mathbf{w}_{zrd}({}^{zrd}\mathbf{x}) - \underbrace{\mathbf{A} \cdot {}^{enf}\mathbf{w}_{zrd}({}^{zrd}\mathbf{x}) + \frac{\partial \boldsymbol{\psi}_1}{\partial {}^{zrd}\mathbf{x}_1^T} {}^{zrd}\mathbf{x}_2}_{= \boldsymbol{\varphi}({}^{zrd}\mathbf{x}_1, {}^{zrd}\mathbf{x}_2)}, \end{aligned}$$

mit einer entsprechend dünn besetzten Matrix  $\mathbf{A}$ , um Abhängigkeiten von  ${}^{zrd}\mathbf{x}_3$  im additiven Term auszuschließen. Um die Umkehrbarkeit zu erzielen, damit die Lösung als Koordinatentransformation verwendbar ist, müssen die anderen Zustände, mit entsprechenden Rangbedingungen, ebenfalls in die Lösungsfunktion integriert werden. Der Transfer der Lösungsidee

aus dem vorigen Abschnitt erfordert, dass eine zweite Lösungsfunktion zu erzeugen ist, die den Faktor vor dem Term mit  ${}^{zrd}\mathbf{x}_3$  eliminiert. In diesem Fall gilt also

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi_{12}}{\partial {}^{zrd}\mathbf{x}_2^T} \mathbf{M}_q^{-1} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{J}_q^T \text{diag}(\boldsymbol{\sigma} \mathbf{J}_q {}^{zrd}\mathbf{x}_2) {}^{zrd}\mathbf{x}_3 &= \mathbf{K}_3 {}^{zrd}\mathbf{x}_3 \\ \Rightarrow \frac{\partial \psi_{12}}{\partial {}^{zrd}\mathbf{x}_2^T} &= \mathbf{K}_3 \text{diag}^{-1}(\boldsymbol{\sigma} \mathbf{J}_q {}^{zrd}\mathbf{x}_2) \boldsymbol{\sigma} \mathbf{J}_q^{-T} \mathbf{M}_q. \end{aligned}$$

Die Forderung ist nicht erfüllbar, da die Matrix in obiger Gleichung im Allgemeinen nicht integrierbar ist. Die Integrabilitätsbedingungen liefern für die Komponente der Zeile  $i$

$$\mathbf{m}_{q,i}^T \mathbf{j}_1^* (j_{i,1} {}^{zrd}x_{2,1})^{-1} = \dots = \mathbf{m}_{q,i}^T \mathbf{j}_{n_{dof}}^* (j_{i,n_{dof}} {}^{zrd}x_{2,n_{dof}})^{-1}, \quad (4.87)$$

wobei die  $\mathbf{j}_i$  die Spaltenvektoren der Jakobimatrix  $\boldsymbol{\sigma} \mathbf{J}_q$  sind und die  $\mathbf{j}_i^*$  die ihrer Inversen. Die Massenmatrix zerstört die geforderte Symmetrie zwar nicht, die Forderungen an die Jakobimatrix sind jedoch stark einschränkend. Die Integrabilitätsbedingungen sind daher nur in Ausnahmefällen erfüllt.

Ein weiterer Ansatz die generalisierten Geschwindigkeiten  ${}^{zrd}\mathbf{x}_2$  in die Koordinatentransformation zu integrieren besteht darin, eine lineare Abhängigkeit im zweiten Term zuzulassen und diese mittels der Ableitung nach  ${}^{zrd}\mathbf{x}_1$  zu kompensieren. Angesetzt wird daher eine Funktion in Abhängigkeit aller Zustandsgrößen, die sich als Summe aus zwei Teilzuständen ergibt

$$\psi_{123} = \psi_{13} + \psi_{12} = \text{diag}({}^{zrd}\mathbf{x}_3) \boldsymbol{\psi}_1 + \boldsymbol{\sigma} \mathbf{J}_q^{-T} \mathbf{M}_q {}^{zrd}\mathbf{x}_2. \quad (4.88)$$

In die partielle Differentialgleichung eingesetzt folgt dann

$$\begin{aligned} \nabla \psi_{123} &= \left[ \text{diag}({}^{zrd}\mathbf{x}_3) \frac{\partial \boldsymbol{\psi}_1}{\partial {}^{zrd}\mathbf{x}_1^T} + \frac{\partial \boldsymbol{\sigma} \mathbf{J}_q^{-T} \mathbf{M}_q {}^{zrd}\mathbf{x}_2}{\partial {}^{zrd}\mathbf{x}_1^T} \quad \mathbf{0} + \boldsymbol{\sigma} \mathbf{J}_q^{-T} \mathbf{M}_q \quad \text{diag}(\boldsymbol{\psi}_1) + \mathbf{0} \right] \\ \Rightarrow \text{diag}({}^{zrd}\mathbf{x}_3) \frac{\partial \boldsymbol{\psi}_1}{\partial {}^{zrd}\mathbf{x}_1^T} {}^{zrd}\mathbf{x}_2 &+ \frac{\partial \boldsymbol{\sigma} \mathbf{J}_q^{-T} \mathbf{M}_q {}^{zrd}\mathbf{x}_2}{\partial {}^{zrd}\mathbf{x}_1^T} {}^{zrd}\mathbf{x}_2 - \boldsymbol{\sigma} \mathbf{J}_q^{-T} \boldsymbol{\xi} + \\ \boldsymbol{\sigma} \mathbf{J}_q^{-T} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{J}_q^T \text{diag}({}^{zrd}\mathbf{x}_3) \boldsymbol{\sigma} \mathbf{J}_q {}^{zrd}\mathbf{x}_2 &\stackrel{?}{=} \mathbf{A}(\text{diag}({}^{zrd}\mathbf{x}_3) \boldsymbol{\psi}_1 + \boldsymbol{\sigma} \mathbf{J}_q^{-T} {}^{zrd}\mathbf{x}_2) + \boldsymbol{\varphi}. \end{aligned}$$

Es zeigt sich, dass dies keine Lösung ist. Der Term  $\mathbf{A} \text{diag}({}^{zrd}\mathbf{x}_3) \boldsymbol{\psi}_1$  hat keine Entsprechung auf der linken Seite, die Transformation führt demnach nicht auf die gewünschte Form. Der Term ist notwendig, um einen anderen Term auf der linken Seite der Gleichung zu kompensieren. Da die Jakobimatrix aus der Ableitung der Ortsbeziehungen hervorgeht, existiert für



sie eine Potentialfunktion, so dass gilt

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial {}^{zrd}\mathbf{x}_1^T} = -\boldsymbol{\sigma} \mathbf{J}_q \Rightarrow \text{diag}({}^{zrd}\mathbf{x}_3) \frac{\partial \psi_1}{\partial {}^{zrd}\mathbf{x}_1^T} {}^{zrd}\mathbf{x}_2 + \text{diag}({}^{zrd}\mathbf{x}_3) \boldsymbol{\sigma} \mathbf{J}_q {}^{zrd}\mathbf{x}_2 = \mathbf{0}. \quad (4.89)$$

Andere Kombinationen als Ansatzfunktionen erscheinen auch vor dem Hintergrund der Eingangsgrößen, siehe Bemerkung 2, nicht sinnvoll. Eine Transformation auf einen Beobachter mit linearer Fehlerdynamik und entsprechendem Definitionsbereich gelingt nicht.

## 4.6 Zusammenfassung der Beobachterttypen

Dieses Kapitel untersuchte neben der Durchführbarkeit der Zustandsschätzung drei mögliche Realisierungen eines Beobachteransatzes für das reibbehaftete System. Alle vorgestellten Ansätze zum Entwurf eines Zustandsschätzers basieren dabei auf der Transformation des Systems in eine Beschreibung, die die Auslegung des Beobachters begünstigt. Ein wesentlicher Unterschied zum linearen Fall besteht darin, dass trotz der Anfangs bewiesenen Beobachtbarkeit der Zustände, ein entsprechender Beobachter nicht zwangsweise existieren muss.

In den Abschnitten 4.4 und 4.4.1 wurde gezeigt, dass der klassische Ansatz des Normalformbeobachters für das System i. Allg. nicht durchführbar ist. Die zur Transformation notwendige Lösung der Differentialgleichung existiert nicht, oder hat keine Lösung von entsprechendem Rang, so dass die Transformation mit einem Informationsverlust einhergehen würde.

Der Beobachter basierend auf der Transformation in die Beobachtbarkeitsnormalform weist die geringsten Einschränkungen bzgl. des Systems auf. Die Transformation basiert direkt auf den Bedingungen, die zum generellen Nachweis der Beobachtbarkeit notwendig sind. Dies ist ein großer Vorteil des Ansatzes. Einer der wesentlichen Nachteile dieses Verfahrens ist, dass das Modell des Systems zwar zur Transformation herangezogen wird, beim späteren Entwurf jedoch keine Rolle spielt. Die verbleibende Nichtlinearität des Systems wird als Störung aufgefasst, die von der für den linearen Teil entworfenen Rückkopplung kompensiert werden muss. Je größer die Beobacherverstärkung desto stärker wird der nichtlineare Anteil unterdrückt. Daher erreicht dieser Ansatz nur näherungsweise eine lineare Fehlerdynamik. Aus den hohen Verstärkungen die sich aus der Unterdrückung der Nichtlinearität ergeben, folgt zudem ein annähernd differenzierendes Verhalten des Beobachters. Bei verrauschten Messsignalen führt dies zu Problemen.

Die Erweiterung des Normalformbeobachters zur erweiterten Form hingegen berücksichtigt das Modell des Systems auch in den Beobachtergleichungen. Die Nichtlinearität tritt als zusätzlicher additiver Term auf, der, ein exaktes Modell vorausgesetzt, zur Kompensation

genutzt wird. Dadurch ergibt sich die lineare Fehlerdynamik des Systems und ein exponentielles Abklingen des Schätzfehlers. Die Vorgabe der Fehlerdynamik wird zudem genau getroffen. Eine Existenz dieser Form unterliegt jedoch, wie in Abschnitt 4.5 dargestellt, zusätzlichen Bedingungen. Die Messung der Geschwindigkeit ist eine notwendige Voraussetzung zum Entwurf. Die Anzahl der schätzbaren Größen fällt zudem geringer aus.

Insgesamt überwiegen jedoch die Vorteile des Beobachters basierend auf der erweiterten Form. Die Messung der Antriebsgeschwindigkeiten ist bei den vorliegenden Systemen gegeben und auch die Zahl der benötigten Schätzgrößen wird im Falle der adaptronischen Gelenke nicht überschritten. Daher wird der Beobachter nach Abschnitt 4.5 zur Bestimmung der Reibgrößen herangezogen.

## 4.7 Diskretisierung des Beobachters

Der in den vorigen Abschnitten entwickelte Beobachter ist im zeitkontinuierlichen Bereich entworfen. Die Implementierung der Gleichung erfolgt auf Grund ihrer komplexen Struktur und notwendigen Berechnungen auf entsprechend leistungsfähigen Digitalrechnern. Die Auswertung der Beobachtergleichungen muss dabei konsequenterweise in Echtzeit erfolgen, um die Resultate im Kontext der Regelung verwenden zu können. Eine Auswertung der kontinuierlichen Gleichung mittels numerischer Verfahren ist daher nicht möglich. Die Gleichungen sind daher in den zeitdiskreten Bereich zu transferieren. Die einfachste Variante zur Umsetzung stellt das Eulersche Polygonzugverfahren bzw. die Rückwärtsdifferenz dar [51, 52]. Dazu wird das System als Anfangswertproblem betrachtet und der Wert zum Folgezeitpunkt über die lineare Interpolation auf Basis der aktuellen Werte ermittelt

$$\tilde{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{x}(t_0) + \dot{\mathbf{x}}(t_0) \cdot (t - t_0),$$

wobei  $\tilde{\mathbf{x}}(t)$  den Schätzwert darstellt. Für die Beobachterdifferentialgleichung nach Gleichung (4.81) folgt daraus mit der Abtastzeit  $T_s$

$$\begin{aligned} {}^{enf}\mathbf{x}(t) &= {}^{enf}\mathbf{x}(t_0) + \left. \frac{d}{dt} {}^{enf}\mathbf{x}(t) \right|_{t=t_0} \cdot (t - t_0) \\ {}^{enf}\mathbf{x}(t_0 + T_s) &= {}^{enf}\mathbf{x}(t_0) + \left. \frac{d}{dt} {}^{enf}\mathbf{x}(t) \right|_{t=t_0} \cdot (T_s) \\ {}^{enf}\mathbf{x}(t_0 + T_s) &= {}^{enf}\mathbf{x}(t_0) + T_s \cdot \left( \mathbf{A}^{enf}\mathbf{x}(t_0) + \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{y}(t_0)) + {}^{enf}\mathbf{G}(\mathbf{y}(t_0)) \cdot \boldsymbol{\tau}_d(t_0) \right). \end{aligned} \quad (4.90)$$

Mit Hilfe von Gleichung (4.90) folgt der Übertrag der Gleichung (4.81) in den zeitdiskreten Bereich schließlich zu

$${}^{enf}\mathbf{x}[k+1] = {}^{enf}\mathbf{x}[k] + T_s \cdot \left( \mathbf{A}^{enf}\mathbf{x}[k] + \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{y}[k]) + {}^{enf}\mathbf{G}(\mathbf{y}[k]) \tau_{d,k} \right). \quad (4.91)$$

---

Bei entsprechend hohen Abtastzeiten ist die Näherung des Systems hinreichend genau, zumal eine exakte Transformation der Gleichung nicht ohne weiteres möglich ist. Diese würde analog zum linearen Fall eine Lösung der nichtlinearen Differentialgleichung (4.90) fordern. Da es sich um einen Beobachter handelt, werden kleine Abweichungen vom Originalsystem ohnehin durch die interne Dynamik eliminiert. Die Hinzunahme komplexerer Algorithmen würde zudem die zur Auswertung benötigten Rechenoperationen steigern, so dass die Abtastzeit sinken würde.



## 5 Regelungstechnische Nutzung der Informationen

Die im Kapitel 4 aufgeführten Mechanismen zur Detektion der Reibkraft sollen nun im weiteren im regelungstechnischen Kontext genutzt werden. Obwohl auch die Kenntnis der zusätzlichen Kräfte eine wertvolle Information darstellt, an Hand derer Entscheidungen getroffen werden können, wie zum Beispiel im Bereich der Adaptronik im Bezug auf die Umschaltung auf geringere Reibung bei Fahrten mit hoher Geschwindigkeit, so lässt sich die Information auch in die Steuerung und Regelung des Starrkörpers integrieren. Vorgestellt werden in diesem Kapitel zwei Ansätze: Die Kompensation der Reibung durch eine entsprechende Aufschaltung der geschätzten Größen, sowie den Rückfluss der Reibung in die Planung der Trajektorien. Da die Reibung durch adaptronische Gelenke explizit in das System eingebracht wird, ergibt sich ein weiteres Nutzungspotential der aus dem Beobachter gewonnenen Informationen. Sie können zur Ansteuerung der Gelenke selbst genutzt werden, da sie einen Rückschluss auf den gegenwärtigen Gelenkzustand erlauben.

### 5.1 Kompensation der Reibkräfte

Die unmittelbare Kompensation der Reibkräfte ist zunächst der naheliegende Weg die zusätzlich gewonnenen Informationen zu nutzen. Es erfolgt eine Aufschaltung der detektierten Größen im Regelkreis, so dass sich die Struktur nach Abbildung 5.1 ergibt. Der Vorteil dieser Methode liegt in der direkten Verwendung der Informationen. In der gesamten Hierarchie der im SFB 562 aufgesetzten Robotersteuerung, siehe [53], siedelt sich diese Verwendung auf der Ebene der Regelung und somit auf der maschinennahen Schicht an. Ein Rückfluss der Informationen in den übrigen Kontext der Robotersteuerung ist nicht erforderlich, wenn der Beobachter als Bestandteil des Reglers interpretiert wird. In der in Abbildung 5.1 gezeigten Struktur ist die Steuerung stark vereinfacht dargestellt. Insbesondere ist offen, in welchen Koordinaten über die Schnittstelle kommuniziert wird. Die Vorsteuerung der geschätzten Momente erfolgt hingegen in generalisierten Koordinaten. Unabhängig von der Reglerstruktur enthält der Systemeingang daher eine neue Komponente  $\tau_f$ , die dem Regler-

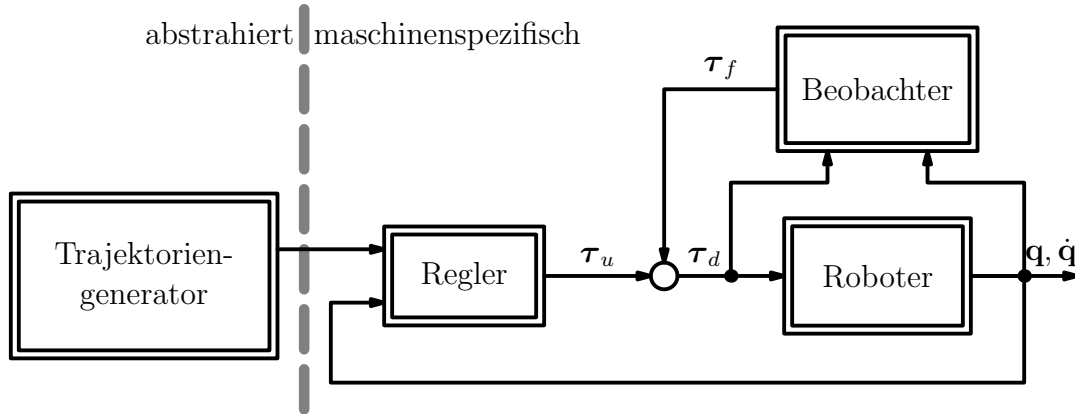


Abbildung 5.1: Struktur des Regelkreises bei Aufschaltung der detektierten Informationen auf Reglerebene. Die Schnittstelle zwischen beiden Abstraktionsebenen ist hier nicht näher spezifiziert. Der Ausgang des Beobachters ist bereits in die entsprechenden Koordinaten transformiert.

ausgang zugeschaltet wird

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} {}^{zrd} \mathbf{x} &= {}^{zrd} \mathbf{f}_{\mathbf{x}}({}^{zrd} \mathbf{x}) + {}^{zrd} \mathbf{G}({}^{zrd} \mathbf{x}) \cdot (\tau_u + \tau_f) \\ \tau_f &= -\boldsymbol{\sigma} \mathbf{J}_q^T \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I}_{n_{dof}} \end{bmatrix} ({}^{zrd} \mathbf{w}_{enf} \circ {}^{enf} \mathbf{h}) ({}^{enf} \hat{\mathbf{x}}) \end{aligned} \quad (5.1)$$

Durch die Rückkopplung der Signale in den Regelkreis, stellt sich stets auch die Frage nach der Stabilität der so erzeugten Anordnung. Für die Stabilität des Beobachters ergeben sich aus der zusätzlichen Einspeisung keine Konsequenzen. Zwar ändert sich die Eingangsgröße, diese ist jedoch im Vorhinein bekannt. Ihr Einfluss ist durch die Modellierung in Gleichung (4.81) behandelt. Steht die aufgeschaltete Größe zur Verfügung, so ergibt sich die lineare Fehlerdynamik unabhängig von ihr, da sie kompensiert wird. Der Beobachter konvergiert demnach unabhängig davon, ob die Aufschaltung stattfindet oder nicht. Ist das ursprünglich geregelte System ohne Störgrößenaufschaltungen stabil, so ist es dies auch nach der Aufschaltung, da die Störgröße des Reibmomentes durch die stabile Schätzung, bis auf eine evtl. Anfangsauslenkung, verringert wird. Bei der Betrachtung um eine Ruhelage liefert Lyapunov die Möglichkeit die obige Aussage zu verifizieren. Ist das geregelte System auch ohne die Aufschaltung stabil, so existiert für diesen Fall eine Lyapunovfunktion

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} {}^{zrd} \mathbf{x}_1 \\ {}^{zrd} \mathbf{x}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} {}^{zrd} \mathbf{f}_{\mathbf{x},1} \\ {}^{zrd} \mathbf{f}_{\mathbf{x},2} + \mathbf{B}(\mathbf{y}) {}^{zrd} \mathbf{x}_3 + \mathbf{R}({}^{zrd} \mathbf{x}_{1,2}) \end{bmatrix} \\ V_1 : \mathbb{R}^n &\mapsto \mathbb{R} \quad \begin{aligned} &V_1({}^{zrd} \mathbf{x}_{1,2}) > 0 \\ &\dot{V}_1({}^{zrd} \mathbf{x}_{1,2}) \leq 0 \end{aligned} \quad \forall {}^{zrd} \mathbf{x}_{1,2} \in \mathcal{D}, \end{aligned} \quad (5.2)$$

wobei  $\mathbf{R}$  den stabilisierenden Regler darstellt. Für die Ableitung der Funktion ergibt sich daher folgende Bedingung

$$\dot{V}_1({}^{zrd}\mathbf{x}_{1,2}) = \frac{\partial V_1}{\partial {}^{zrd}\mathbf{x}_1^T} {}^{zrd}\mathbf{f}_{x,1} + \frac{\partial V_1}{\partial {}^{zrd}\mathbf{x}_2^T} ({}^{zrd}\mathbf{f}_{x,2} + \mathbf{B}(\mathbf{y}) {}^{zrd}\mathbf{x}_3 + \mathbf{R}({}^{zrd}\mathbf{x}_{1,2})) \leq 0 \quad (5.3)$$

$$\Leftrightarrow -\frac{\partial V_1}{\partial {}^{zrd}\mathbf{x}_1^T} {}^{zrd}\mathbf{f}_{x,1} - \frac{\partial V_1}{\partial {}^{zrd}\mathbf{x}_2^T} ({}^{zrd}\mathbf{f}_{x,2} + \mathbf{R}({}^{zrd}\mathbf{x}_{1,2})) \geq \frac{\partial V_1}{\partial {}^{zrd}\mathbf{x}_2^T} \mathbf{B}(\mathbf{y}) {}^{zrd}\mathbf{x}_3. \quad (5.4)$$

Die obige Aufteilung trennt die Störung von den übrigen Größen ab. Da die Aussage für alle Störvektoren aus dem Definitionsbereich gelten muss, kann die Bedingung mittels der Cauchy-Schwarz Ungleichung auf eine obere Schranke abgeschätzt werden. Diese Unabhängigkeit der Bedingung von konkreten Vektoren, bedeutet eine notwendige Verschärfung

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial V_1}{\partial {}^{zrd}\mathbf{x}_2^T} \mathbf{B}(\mathbf{y}) {}^{zrd}\mathbf{x}_3 \right| &\leq \left\| \frac{\partial V_1}{\partial {}^{zrd}\mathbf{x}_2^T} \mathbf{B}(\mathbf{y}) \right\|_2 \|{}^{zrd}\mathbf{x}_3\|_2. \\ \Rightarrow -\frac{\partial V_1}{\partial {}^{zrd}\mathbf{x}_1^T} {}^{zrd}\mathbf{f}_{x,1} - \frac{\partial V_1}{\partial {}^{zrd}\mathbf{x}_2^T} ({}^{zrd}\mathbf{f}_{x,2} + \mathbf{R}({}^{zrd}\mathbf{x}_{1,2})) &\geq \left\| \frac{\partial V_1}{\partial {}^{zrd}\mathbf{x}_2^T} \mathbf{B}(\mathbf{y}) \right\|_2 \|{}^{zrd}\mathbf{x}_3\|_2 \end{aligned} \quad (5.5)$$

Mit Hinzunahme der Störgrößenaufschaltung ändert sich die Dimension des zu betrachtenden Systems. Es wird die Abweichung als zusätzlicher  ${}^{zrd}\mathbf{x}_3^* = {}^{zrd}\mathbf{x}_3 - {}^{zrd}\hat{\mathbf{x}}_3$  Zustand eingeführt, mit dem sich das System dann beschreiben lässt

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} {}^{zrd}\mathbf{x}_1 \\ {}^{zrd}\mathbf{x}_2 \\ {}^{zrd}\mathbf{x}_3^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^{zrd}\mathbf{f}_{x,1} \\ {}^{zrd}\mathbf{f}_{x,2} + \mathbf{R}({}^{zrd}\mathbf{x}_{1,2}) + \frac{{}^{zrd}\mathbf{f}_{x,1} \mathbf{B}(\mathbf{y}) {}^{zrd}\mathbf{x}_3 - \mathbf{B}(\mathbf{y}) {}^{zrd}\hat{\mathbf{x}}_3}{\mathbf{b}({}^{zrd}\hat{\mathbf{x}}^*)} \\ \mathbf{B}(\mathbf{y}) {}^{zrd}\mathbf{x}_3^* \end{bmatrix} \quad (5.6)$$

Aus der stabil entworfenen Beobachterdynamik folgt, dass der Schätzfehler asymptotisch gegen Null strebt, die über die Funktion  $\mathbf{b}({}^{zrd}\hat{\mathbf{x}}^*)$  beschriebene Dynamik also stabil ist. Daher existiert auch für diese Dynamik eine Lyapunovfunktion  $V_2({}^{zrd}\hat{\mathbf{x}}^*)$ . Die Superposition beider Funktionen der Teilsysteme ergibt einen Kandidaten für die Funktion des Gesamtsystems

$$V_3({}^{zrd}\mathbf{x}) = V_1({}^{zrd}\mathbf{x}_{1,2}) + V_2({}^{zrd}\mathbf{x}_3^*). \quad (5.7)$$

Die Funktion enthält alle Zustände und ist über den gesamten Definitionsbereich größer Null. Es ist also zu prüfen, ob ihre Ableitung negativ im gesamten Definitionsbereich ist. Durch

Anwendung der Kettenregel ergibt sich

$$\begin{aligned}
\frac{dV_2}{dt} &= \frac{\partial V_2}{\partial {}^{zrd}\mathbf{x}^T} \cdot \frac{d {}^{zrd}\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} \frac{\partial V_2}{\partial {}^{zrd}\mathbf{x}_1^T} & \frac{\partial V_2}{\partial {}^{zrd}\mathbf{x}_2^T} & \frac{\partial V_2}{\partial {}^{zrd}\mathbf{x}_3^T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^{zrd}\mathbf{f}_{x,1} \\ {}^{zrd}\mathbf{f}_{x,2} + \mathbf{R}(\mathbf{y}) + \mathbf{B}(\mathbf{y}) {}^{zrd}\mathbf{x}_3^* \\ \mathbf{b}({}^{zrd}\hat{\mathbf{x}}) \end{bmatrix} \\
&= \frac{\partial V_1}{\partial {}^{zrd}\mathbf{x}_1^T} {}^{zrd}\mathbf{f}_{x,1} + \frac{\partial V_1}{\partial {}^{zrd}\mathbf{x}_2^T} ({}^{zrd}\mathbf{f}_{x,2} + \mathbf{R}(\mathbf{y}) + \mathbf{B}(\mathbf{y}) {}^{zrd}\mathbf{x}_3^*) + \frac{\partial V_2}{\partial {}^{zrd}\mathbf{x}_3^T} \mathbf{b}({}^{zrd}\hat{\mathbf{x}}) \\
&= \underbrace{\frac{\partial V_2}{\partial {}^{zrd}\mathbf{x}_3^T} \mathbf{b}({}^{zrd}\hat{\mathbf{x}})}_{= \dot{V}_2 < 0} + \underbrace{\frac{\partial V_1}{\partial {}^{zrd}\mathbf{x}_1^T} {}^{zrd}\mathbf{f}_{x,1} + \frac{\partial V_1}{\partial {}^{zrd}\mathbf{x}_2^T} ({}^{zrd}\mathbf{f}_{x,2} + \mathbf{R}(\mathbf{y})) + \frac{\partial V_1}{\partial {}^{zrd}\mathbf{x}_2^T} \mathbf{B}(\mathbf{y}) {}^{zrd}\mathbf{x}_3^*}_{= \dot{V}_1^*}
\end{aligned}$$

Der mit  $\dot{V}_1^*$  bezeichnete Ausdruck ähnelt der Ableitung der ersten Lyapunovfunktion  $\dot{V}_1$ . An die Stelle des früheren externen Vektors  ${}^{zrd}\mathbf{x}_3$  ist der Schätzfehler  ${}^{zrd}\mathbf{x}_3^*$  getreten. Dessen 2-Norm ist auf Grund der linearen Fehlerdynamik und einem Startwert von Null stets kleiner als der wahre Wert der Norm  $\|{}^{zrd}\mathbf{x}_3\|_2$ . Zusammen mit Gleichung (5.5) ergibt sich die Abschätzung

$$\left| \frac{\partial V_1}{\partial {}^{zrd}\mathbf{x}_2^T} \mathbf{B}(\mathbf{y}) {}^{zrd}\mathbf{x}_3^* \right| \leq \left\| \frac{\partial V_1}{\partial {}^{zrd}\mathbf{x}_2^T} \mathbf{B}(\mathbf{y}) \right\|_2 \|{}^{zrd}\mathbf{x}_3^*\|_2 \leq \left\| \frac{\partial V_1}{\partial {}^{zrd}\mathbf{x}_2^T} \mathbf{B}(\mathbf{y}) \right\|_2 \|{}^{zrd}\mathbf{x}_3\|_2. \quad (5.8)$$

Da der Betrag des neuen Terms also stets kleiner ist als der entsprechende Term in der ursprünglichen Gleichung, bleibt die notwendige Bedingung, damit die Ableitung der Funktion  $V_1$  stets kleiner Null ist, erfüllt. Damit ist auch die Ableitung  $\dot{V}_3$  stets kleiner als Null und die Funktion ist eine Lyapunovfunktion für das System. Die Hinzunahme der Störgrößenaufschaltung gefährdet die Stabilität des Regelkreises demnach nicht und kann vorgenommen werden.

Die Regelqualität hingegen kann durch die inverse Aufschaltung der Störgröße verbessert werden, da die Vorhersage und damit verbundene Kompensation oder Teilkompensation den Regelkreis entlastet. Qualitativ lässt sich dieser Effekt auch an der Lyapunovfunktion die zur Stabilitätsbetrachtung genutzt wurde festmachen: Der Betrag der Ableitung der Funktion ist größer, somit verliert das System schneller Energie und nähert sich der Ruhelage. Auch bei der Folgeregelung verbessert die Aufschaltung die Regelqualität. Die in [54] beschriebene Anwendung eines Beobachters zur Detektion der Reibung im System mit anschließender Kompensation führte zur signifikanten Verbesserung der Regelqualität. Dabei verbesserten sich sowohl die Bahnfehler als auch insbesondere der Einschwingprozess.





Abbildung 5.2: Blockschaltbilder der zeitoptimal zu steuernden Systeme: Zweifach integrierendes System sowie ungedämpftes PT<sub>2</sub>-System

## 5.2 Modifizierte Trajektoriengenerierung

Der vorherige Abschnitt stellte die Nutzung der durch den Beobachter gewonnen Informationen über die adaptronischen Gelenke in Form einer Störgrößenaufschaltung vor. Durch diese Aufschaltung wird der Fehler, der durch die Reibung induziert wird, intern kompensiert. An der Schnittstelle zwischen Planung und Regelung erscheint das System dann wie im Fall ohne die zusätzlichen Reibmomente. Unabhängig von der gewählten Form der Linearisierung gilt bei Aufschaltung annähernd die ursprüngliche Differentialgleichung

$$\frac{d}{dt} {}^{zrd} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} {}^{zrd} \mathbf{x}_2 \\ \mathbf{M}_q^{-1} (\boldsymbol{\tau}_u - \mathbf{C}_q {}^{zrd} \mathbf{x}_2 - \mathbf{g}_q + \boldsymbol{\sigma} \mathbf{J}_q^T {}^{zrd} \mathbf{x}_3 - \boldsymbol{\sigma} \mathbf{J}_q^T {}^{zrd} \hat{\mathbf{x}}_3) \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}. \quad (5.9)$$

Für die Planung der Trajektorien ergibt sich daher kein Unterschied, da das System im Falle der exakten Ein-/Ausganglinearisierung wie zuvor auf einen doppelten Integrator abgebildet wird. Durch die zusätzliche Aufschaltung des Kompensationsmomentes mittels  $\mathbf{M}_q^{-1} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{J}_q^T {}^{zrd} \hat{\mathbf{x}}_3$  steigt jedoch in der Beschleunigungsphase der Bedarf der durch die Antriebe aufzubringenden Momente an, bzw. sinkt während der Verzögerung. Ohne Kommunikation mit der überlagerten Schicht im gesamten System werden diese Änderungen nicht an die Planung weitergegeben, so dass diese die veränderten Verhältnisse nicht berücksichtigt. Liegt die Berücksichtigung der Reibungseinflüsse im Planer, so stellt sich die Frage der Stabilität auch nicht mehr, da der Einfluss außerhalb des Regelkreises liegt. Lediglich die Stabilität der Schätzung muss untersucht werden, diese ist jedoch, wie im Kapitel zuvor beschrieben, von den Einflüssen des Reglers unabhängig.

**Beispiel 5** Die Motivation für ein solches Vorgehen kann aus einem linearen Beispiel abgeleitet werden. Dabei werden die zeitoptimalen Trajektorien eines Doppelintegrators mit denen eines über die Position gegengekoppelten Doppelintegrators verglichen, siehe Abbildung 5.2. Ihre Zustandsdifferentialgleichungen lauten

$$\begin{array}{cc} \text{Doppelintegrator} & \text{Ungedämpftes PT}_2 \\ \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u & \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \end{array} \quad (5.10)$$

Die zeitoptimale Steuerung beider Systeme ergibt sich aus dem Optimierungsproblem mit dem Gütefunktional

$$J = \int_0^{t_e} 1 dt = t_e. \quad (5.11)$$

Zur vollständigen Spezifikation des Optimierungsproblems ist die Festlegung eines Endzustandes wichtig, der hier, im Falle linearer Systeme, o. B. d. A. auf den Koordinatenursprung  $\mathbf{x} = \mathbf{o}$  für beide Systeme gelegt ist. Die Eingangsgröße ist symmetrisch um Null beschränkt  $|u(t)| \leq u_{\max}$ . Für den doppelten Integrator gilt der Satz von Feldbaum, siehe [55]. Für die zeitoptimale Steuerung liegt daher die Anzahl der Umschaltungen durch die Systemordnung fest: Es gibt genau einen Wechsel der Eingangsgröße. Damit lässt sich die Lösung des Optimierungsproblems vereinfachen. Zur Aufstellung des Gleichungssystems muss die allgemeine Lösung der Zustandsgleichung bestimmt werden

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= e^{\mathbf{A}_I t} \mathbf{x}_0 + \int_0^t e^{\mathbf{A}_I(t-\tau)} \mathbf{b}_I u d\tau & \mathbf{x} &= e^{\mathbf{A}_P t} \mathbf{x}_0 + \int_0^t e^{\mathbf{A}_P(t-\tau)} \mathbf{b}_P u d\tau \\ e^{\mathbf{A}_I t} &= \mathbf{I} + \begin{bmatrix} 0 & t \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \dots = \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & e^{\mathbf{A}_P t} &= \begin{bmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -\sin(t) & \cos(t) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Für beide Fälle wird ein Anfangswert der Form  $\mathbf{x}_0 = [x_{10}, 0]^T$  angesetzt. Mit Hilfe der obigen Gleichungen und des Satzes von Feldbaum lässt sich nun ein Gleichungssystem zur Lösung der Optimalaufgabe für den doppelten Integrator konstruieren

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t_e) = \mathbf{o} &= \begin{bmatrix} x_{10} \\ 0 \end{bmatrix} + \int_0^{t_s} \begin{bmatrix} t_e u_0 - \tau u_0 \\ u_0 \end{bmatrix} d\tau + \int_{t_s}^{t_e} \begin{bmatrix} -t_e u_0 + \tau u_0 \\ -u_0 \end{bmatrix} d\tau \\ &= \begin{bmatrix} x_{10} + t_e u_0 (t_e - 2t_s) - \frac{u_0}{2} (t_e^2 - 2t_s^2) \\ u_0 (t_e - 2t_s) \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} t_e &= 2t_s \\ t_s &= \sqrt{x_{10}/u_0} \end{aligned} \end{aligned}$$

Das ungedämpfte PT<sub>2</sub>-System erfüllt die Voraussetzungen des Satzes von Feldbaum nicht, da die Pole nicht rein reell sind. Die Anzahl der Umschaltungen hängt vom Anfangswert und der Eingangsbeschränkung  $u_{\max}$  ab. Dies zeigt auch die Darstellung des Systems im Phasenraum, Abbildung 5.3.

Auch wenn sich bereits hier die Umschaltpunkte und deren Anzahl nicht mehr so einfach bestimmen lassen, kann doch die Schaltkurve in der Phasenebene angegeben werden, so dass sich die Trajektorien für konkrete Anfangswerte bestimmen lassen

$$\begin{aligned} s(x_1, x_2) &: (x_1 - (2n - 1))^2 + x_2 = 1, x_1 > 0, x_2 < 0, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}. \\ &\cap (x_1 + (2n - 1))^2 + x_2 = 1, x_1 < 0, x_2 > 0, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}. \end{aligned}$$

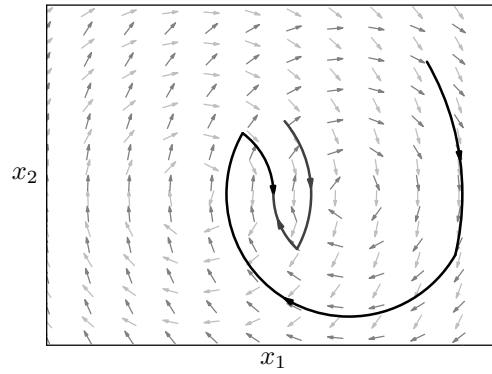


Abbildung 5.3: Darstellung des Vektorfeldes des ungedämpften Systems im Phasenraum, jeweils mit maximalem Reglereingriff  $\pm u_{max}$  und zwei zeitoptimalen Trajektorien mit zwei Umschaltpunkten (schwarz) und einem Umschaltpunkt (dunkelgrau).

Zum Vergleich wird nun das ungedämpfte System einmal mittels Kompensation und der zeitoptimalen Trajektorie des doppelten Integrators, sowie einmal mit der angepassten zeitoptimalen Trajektorie vorgesteuert. Die Eingangsbeschränkung bei der Trajektoriengenerierung ist in beiden Fällen auf  $u_{max} = 1$  festgelegt, als Anfangswerte dienen  $\mathbf{x}_{01,02} = [1,9; 0]^T, [4; 0]^T$ , wobei sich die Anzahl der benötigten Umschaltungen in beiden Fällen unterscheidet. Die Ergebnisse beider Simulationen finden sich in Abbildung 5.4. Sofern die Stellgröße auch im System mit Rückführung das Erreichen der Zielgröße mit einer Umschaltung zulässt, unterscheiden sich beide Steuerungen in der Zustandsgröße  $x_1$  kaum voneinander. Die Differenz in der Position ist den unterschiedlichen Sollverläufen bei der Planung geschuldet, hingegen ist der Unterschied in der Stellgröße erheblich. Die Kompensation verzerrt den ursprünglich schaltenden Verlauf deutlich. Diese zusätzlich benötigte Stellgröße muss vorgehalten werden und steht bei der Planung nicht zur Verfügung. Im Falle, dass die Anzahl der benötigten Umschaltungen größer als 1 werden, unterscheiden sich beide Trajektorien komplett. Insbesondere ergibt sich unter Einhaltung der Stellgrößenbeschränkung auch ein Überspringen in der Zustandsgröße  $x_1$ . Bei der Planung von Trajektorien wäre dies nicht zulässig. Da im hier vorliegenden Fall die Störung jedoch durch Reibung verursacht wird, die stets dämpfend wirkt, ist mit dem Problem des Überspringens nicht zu rechnen, sofern die Stellgrößen im ungestörten Fall ausreichen.  $\square$

Der vorhergehende Absatz hat verdeutlicht, dass die Einbeziehung der Reibung bei der Planung der Trajektorie, anstelle der Kompensation im Regler Vorteile haben kann. Da die Trajektorie im kartesischen Raum geplant wird, wird die Bewegungsgleichung ebenfalls in diesen Koordinaten betrachtet. Die Form der Gleichung bleibt, es ändern sich nur die Abhängigkeiten. Die Systemmatrizen des Roboters sind daher mit dem Index  $x$  gekennzeichnet,

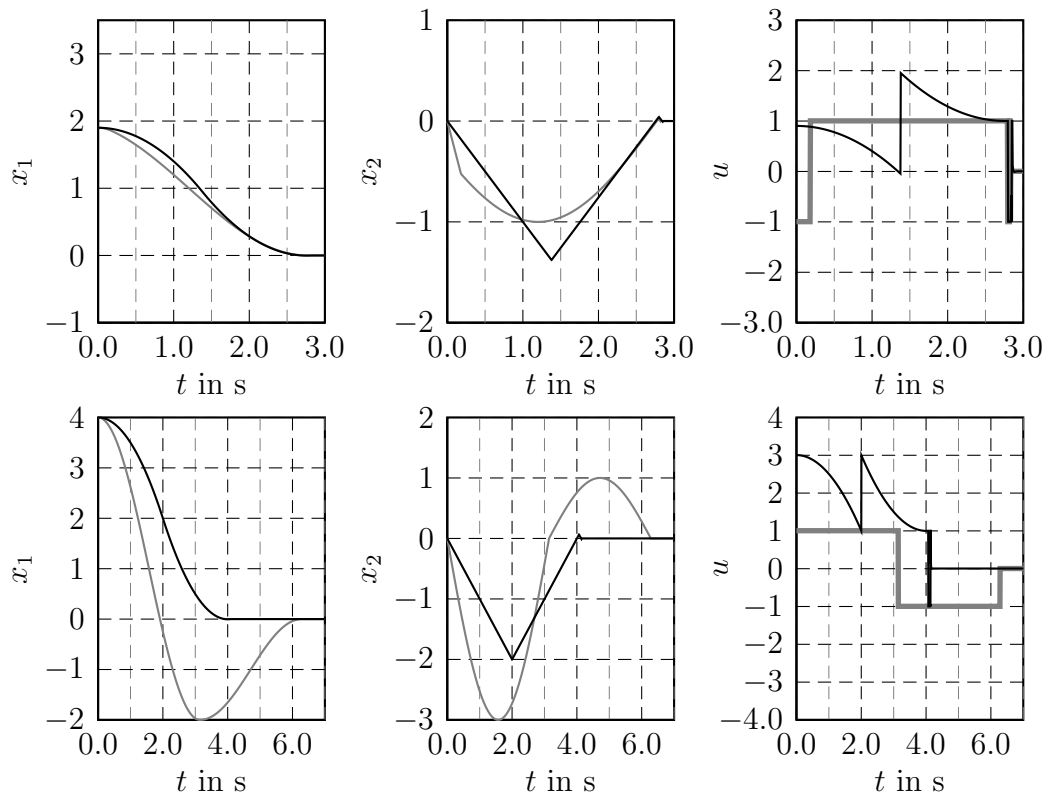


Abbildung 5.4: Verläufe der Eingangsgröße  $u$  und der Zustandsgrößen  $x_1, x_2$  des ungedämpften  $PT_2$ -Systems bei Kompensation (schwarz) und angepasster Trajektorie (grau). Die Verläufe der ersten Zeile beschreiben den Fall ohne zusätzlichen Umschaltzeitpunkt im Falle der veränderten Systemdynamik, die zweite Zeile erfordert eine weitere Umschaltung.

um den Unterschied anzuzeigen

$$\mathbf{M}_x \frac{d^2}{dt^2} {}^{zrd} \mathbf{x}_1 + \mathbf{C}_x \frac{d}{dt} {}^{zrd} \mathbf{x}_1 + \mathbf{g}_x + \mathbf{G}_x {}^\sigma \mathbf{J}_q^T \boldsymbol{\sigma}_r = \mathbf{G}_x \boldsymbol{\tau}_d. \quad (5.12)$$

Der Ansatz eines modellgestützten Regelverfahrens, wie der Ein-/Ausganglinearisierung oder der Vorsteuerung mittels Computed-Torque, [56], werden die entsprechenden Terme der Differentialgleichung kompensiert

$${}_{ct} \boldsymbol{\tau}_d = \mathbf{G}_x^{-1} \left( \mathbf{M}_x \frac{d^2}{dt^2} {}^{zrd} \mathbf{x}_{s,1} - \mathbf{C}_x \frac{d}{dt} {}^{zrd} \mathbf{x}_{s,1} - \mathbf{g}_x \right) + \boldsymbol{\tau}_u. \quad (5.13)$$

Unter der Annahme einer hinreichend guten Kompensation der Terme bleibt in diesem Fall für die zweite Zustandsgröße die Differentialgleichung

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_x \frac{d^2}{dt^2} {}^{zrd} \mathbf{x}_1 + \mathbf{G}_x {}^\sigma \mathbf{J}_q^T \boldsymbol{\sigma}_r &= \mathbf{M}_x \frac{d^2}{dt^2} {}^{zrd} \mathbf{x}_{s,1} \\ \Leftrightarrow \frac{d^2}{dt^2} {}^{zrd} \mathbf{x}_1 + \mathbf{M}_x^{-1} \mathbf{G}_x {}^\sigma \mathbf{J}_q^T \boldsymbol{\sigma}_r &= \frac{d^2}{dt^2} {}^{zrd} \mathbf{x}_{s,1}. \end{aligned} \quad (5.14)$$

Im Gegensatz zum ungestörten System ergibt sich also ein zusätzlicher nichtlinearer Term, so dass das System kein reiner doppelter Integrator mehr ist. Die Nichtlinearität ist ausschließlich von den Zustandsgrößen  ${}^{zrd} \mathbf{x}_1$  anhängig, nicht von deren Ableitungen. Weiterhin ist zu beachten, dass das System nach Gleichung (5.14) noch vektoriell ist.

Wie bei der Bahnplanung üblich, wird die Raumkurve der abzufahrenden Bahn mittels einer Variablen parametrisiert, im Allgemeinen bzgl. der Bogenlänge, um die Zeit aus den Gleichungen zu eliminieren

$${}^{zrd} \mathbf{x}_{s,1} = {}^{zrd} \mathbf{x}_{s,1}(l), \text{ mit } l \dots \text{Bogenlänge}. \quad (5.15)$$

Damit reduziert sich das Problem auf den eindimensionalen Fall. Auf der zu parametrierenden Bahn ist die Zuordnung  $l \rightarrow \mathbf{x}$  dann eindeutig. Damit ergibt sich dann das System nach Abbildung 5.5.

Die nichtlineare Funktion  $f$  fasst die notwendigen Abbildungen zusammen. Die Abhängigkeit von der Geschwindigkeit dient ausschließlich zur Bestimmung des Vorzeichens der in den Gelenken induzierten Reibkräfte. Die Reduzierung auf den skalaren Fall der Bahn berücksichtigt ferner nur Kräfte die entlang der Bahn wirken. Kräfte die zu einer Verzerrung der Bahn führen sind im eindimensionalen nicht abgebildet. Diese zusätzlichen Kräfte sind dann auf Gelenkebene zu kompensieren. Mittels des Tangentialvektors  $\mathbf{t}(l)$  der Kurve im Punkt  $l$ , siehe Abbildung 5.5, ergibt sich für die Abbildung der Reibmomente entlang der

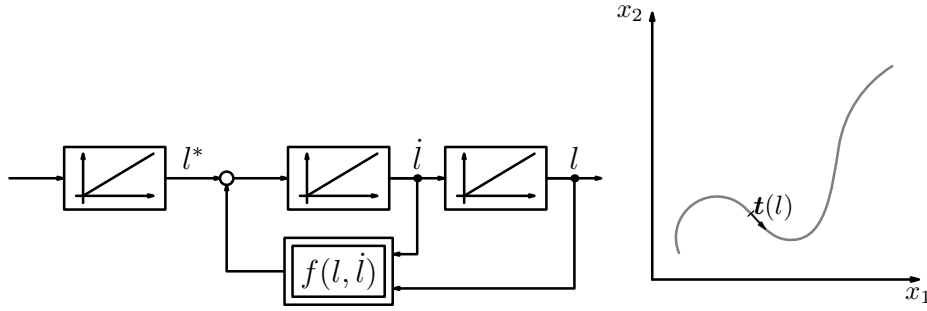


Abbildung 5.5: *Rechts*: Struktur des dynamischen Systems, für das die Trajektorie zu planen ist. Der zusätzliche Integrator zu Beginn ergibt sich aus der Forderung ruckbegrenzter Trajektorien. Die Rückkopplung ist nichtlinear und stützt sich auf Position und Geschwindigkeit. *Links*: Zweidimensionale Trajektorie. Die Parametrierung der Raumkurve erfolgt mittels der Bogenlänge  $l$ .

Bahn als Projektion

$$f = \frac{\mathbf{t}^T(l)}{\|\mathbf{t}(l)\|_2} \mathbf{M}_x^{-1} \mathbf{G}_x (\boldsymbol{\sigma} \mathbf{J}_q^T \text{diag}(\text{sgn}(\boldsymbol{\sigma} \mathbf{J}_q \dot{\mathbf{q}})) \boldsymbol{\sigma}_r). \quad (5.16)$$

Das Skalarprodukt bildet die als Kräfte in den kartesischen Raum transformierten Reibmomente auf die Bahn ab. Mit Hilfe der so definierten Dynamik lassen sich dann Trajektorien für das durch Reibung beeinflusste System berechnen. In Zustandsdarstellung gilt

$$\begin{bmatrix} \dot{s}_1 \\ \dot{s}_2 \\ \dot{s}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u \\ s_1 + f(s_2, s_3) \\ s_2 \end{bmatrix} = \mathbf{a}(\mathbf{s}) + \mathbf{b}u \quad s_1 = l^*, s_2 = \dot{l}, s_3 = l. \quad (5.17)$$

Mit der Beschränkung der Eingangsgröße auf den Wertebereich  $|u| \leq u_{\max}$  kann nun für das System eine optimale Trajektorie gemäß der gewünschten Vorgaben gesucht werden. Dabei ist zu beachten, dass der Eingang linear in das System einkoppelt. Für zeitoptimale Trajektorien ergibt sich mit dem Funktional aus Gleichung (5.11) und den Randwerten  $\mathbf{s}(t=0) = \mathbf{s}_0, \mathbf{s}(t=t_e) = \mathbf{o}$  die Hamiltonfunktion

$$H = 1 + \boldsymbol{\lambda}^T (\mathbf{a}(\mathbf{s}) + \mathbf{b}u), \quad \tilde{H} = H + \mu(|u| - u_{\max}) \quad (5.18)$$

wobei als Ungleichungsnebenbedingung die Beschränkung der Stellgröße einfließt  $|u| \leq u_{\max} \Rightarrow |u| - u_{\max} \leq 0$ . Die Auswertung der Minimierungsbedingung, [55],

$$H(\mathbf{s}, \boldsymbol{\lambda}, u) = \min H(\mathbf{s}, \boldsymbol{\lambda}, U) \quad \forall U \in \mathcal{D}_u \quad (5.19)$$

liefert Informationen über den Verlauf der Stellgröße. Die Ableitung der Hamiltonfunktion nach der Eingangsgröße liefert

$$\frac{\partial H}{\partial u} = \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{b}. \quad (5.20)$$

Durch die lineare Einkopplung der Eingangsgröße existiert kein Extremwert auf dem Intervall, einzig im singulären Fall  $\boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{b} = 0$  ist die Ableitung Null. Daher sind nur die Randwerte des Intervalls zu betrachten  $\pm u_{\max}$ . Das Minimum der Funktion  $H$  ist daher für die folgenden Bedingungen erreicht

$$H \rightarrow \min : u(t) = \begin{cases} -u_{\max} & : \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{b} > 0 \\ u_{\max} & : \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{b} < 0 \end{cases}. \quad (5.21)$$

Trotz der Nichtlinearität ist auch hier die zeitoptimale Regelung eine Schaltende (bang-bang Strategie). Zur vollständigen Spezifikation der Aufgabe fehlen die aus der erweiterten Hamiltonfunktion abfallenden kanonischen Differentialgleichungen

$$\dot{\mathbf{s}} = \tilde{H}_{\boldsymbol{\lambda}} = \mathbf{a}(\mathbf{s}) + \mathbf{b}u \quad \dot{\boldsymbol{\lambda}} = -\tilde{H}_{\mathbf{s}} = \left[ \lambda_2 \quad \frac{\partial f}{\partial s_2} \lambda_2 + \lambda_3 \quad \frac{\partial f}{\partial s_3} \lambda_2 \right]^T, \quad (5.22)$$

so wie die Transversalitätsbedingung, die sich aus der freien Endzeit ergibt

$$H_e(\mathbf{s}_e, \boldsymbol{\lambda}_e, u_e) = 0 \Rightarrow 0 = 1 + \boldsymbol{\lambda}^T(t_e) \cdot (\mathbf{a}(\mathbf{s}(t_e)) + \mathbf{b}u(t_e)). \quad (5.23)$$

Auf Grund der Zeitinvarianz der Hamiltonfunktion, kann aus Gleichung (5.23) gefolgert werden, dass die Hamiltonfunktion im gesamten betrachteten Intervall Null ist. Die Findung zeitoptimaler Trajektorien für das gestörte System ist durch die Gleichungen (5.19), (5.22) und (5.23) mittels der Variationsrechnung beschrieben. Die Ableitungen der nichtlinearen Funktion nach Gleichung (5.16) lassen sich noch weiter bestimmen. Die Raumkurve und ihre zeitliche Ableitung sind gegeben durch

$$\mathbf{x} = \mathbf{k}(l) = \mathbf{k}(s_3) \quad \dot{\mathbf{x}} = \frac{\partial \mathbf{k}}{\partial l} \dot{l} = \mathbf{k}'(s_3) \cdot s_2. \quad (5.24)$$

Für die Ableitung der nichtlinearen Funktion  $f$  nach der Zustandsgröße  $s_2$  folgt daher

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial s_2} &= \frac{\partial}{\partial s_2} \left( \frac{\mathbf{t}^T(s_3)}{\|\mathbf{t}(s_3)\|_2} (\mathbf{M}_x^{-1} \mathbf{G}_x \boldsymbol{\sigma} \mathbf{J}_q^T \text{diag}(\boldsymbol{\sigma}_r) \text{sgn}(\boldsymbol{\sigma} \mathbf{J}_q \mathbf{G}_x^T \mathbf{k}'(s_3) \cdot s_2)) \right) \\ &= \frac{\mathbf{t}^T(s_3)}{\|\mathbf{t}(s_3)\|_2} \mathbf{M}_x^{-1} \mathbf{G}_x \boldsymbol{\sigma} \mathbf{J}_q^T \text{diag}(\boldsymbol{\sigma}_r) \underbrace{\frac{\partial}{\partial s_2} (\text{sgn}(\boldsymbol{\sigma} \mathbf{J}_q \mathbf{G}_x^T \mathbf{k}'(s_3) \cdot s_2))}_{2\delta \left( \langle \boldsymbol{\sigma} \mathbf{J}_q \mathbf{G}_x^T \rangle_{\text{Zeile } i} \mathbf{k}'(s_3) \cdot s_2 \right) \langle \boldsymbol{\sigma} \mathbf{J}_q \mathbf{G}_x^T \rangle_{\text{Zeile } i} \mathbf{k}'(s_3)}} = \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Der obige Ausdruck ist durch die Multiplikation mit der Deltafunktion stets Null, außer an den Stellen, an denen das Argument der Deltafunktion selbst Null ist. Die tritt genau dann ein, wenn eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:

1. Der Parameter  $s_2$  ist Null, also ist die Bahngeschwindigkeit Null. Dies bewirkt, dass der Ausdruck in allen Zeilen zu Null wird. In diesem Fall ist die Reibung undefiniert und höchstens ein Wertebereich angebar, siehe Abschnitt 3.2. Bei Fahrten ohne Überspringen, treten diese Phasen allerdings nicht auf.
2. Das Skalarprodukt  $\langle \sigma \mathbf{J}_q \mathbf{G}_x^T \rangle_{\text{Zeile } i} \mathbf{k}'(s_3)$  für eine oder mehrere Zeilen ist Null. Dies entspricht einem Nulldurchgang der Geschwindigkeiten in den reibbehafteten Gelenken. Dieser Fall tritt beim regulären Abfahren von Bahnen auf, da die Verkopplung zwischen kartesischen und generalisierten Koordinaten stark nichtlinear ist und nicht monoton ist. In diesem Fall findet allerdings auch die Multiplikation der Deltafunktion mit Null statt, so dass der gesamte Ausdruck ebenfalls Null ist.

Demnach ist die Ableitung der Funktion  $s_2$  stets Null. Die Ableitung der Funktion nach der Zustandsgröße  $s_3$  erfordert das wiederholte Anwenden der Produktregel für skalare Größen. Die Jakobimatrizen und die Massenmatrix sind mit der die Raumkurve beschreibenden Funktion verkettet dargestellt, um die Parametrierung mittels der Bogenlänge  $s_3$  zu erreichen

$$\frac{\partial f}{\partial s_3} = \frac{\partial}{\partial s_3} \left( \frac{\mathbf{t}^T(s_3)}{\|\mathbf{t}(s_3)\|_2} \cdot ((\mathbf{M}_x^{-1} \circ \mathbf{k})(s_3) \cdot (\mathbf{G}_x \circ \mathbf{k})(s_3) \cdot (\sigma \mathbf{J}_q^T \circ \mathbf{k})(s_3) \cdot \text{diag}(\sigma_r) \cdot \dots \right. \\ \left. \text{sgn} \left( (\sigma \mathbf{J}_q \circ \mathbf{k})(s_3) \cdot (\mathbf{G}_x \circ \mathbf{k})^T(s_3) \cdot \mathbf{k}'(s_3) \cdot s_2 \right) \right) .$$

Die Ableitungen der verketteten Terme ergibt sich nach Korollar 4 zu

$$\frac{\partial(\mathbf{X} \circ \mathbf{k})}{\partial s_3} = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mathbf{k}^T} (\mathbf{k}' \otimes \mathbf{I}_{n_{\text{dof}}}) . \quad (5.25)$$

Die Ableitung der Signumfunktion resultiert erneut in der Deltafunktion mit gleichem Argument, wie im Falle der Ableitung nach  $s_2$ . Dadurch, dass in diesem Fall nicht mit der Transformationsmatrix, sondern mit der entsprechenden Ableitung multipliziert wird, kommt es bei Richtungswechseln der Geschwindigkeiten in den reibbehafteten Gelenken nicht zur Auslöschung der Deltafunktion. Dies ist bei der Lösung der kanonischen Differentialgleichungen



nach Gleichung (5.22) zu beachten

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s_3} \left( \operatorname{sgn} \left( (\sigma \mathbf{J}_q \circ \mathbf{k})(s_3) \cdot (\mathbf{G}_x \circ \mathbf{k})^T(s_3) \cdot \mathbf{k}'(s_3) \cdot s_2 \right) \right) = \\ 2\delta(\bullet) \left( \frac{\partial(\sigma \mathbf{J}_q \circ \mathbf{k})(s_3)}{\partial s_3} \cdot (\mathbf{G}_x \circ \mathbf{k})^T(s_3) \cdot \mathbf{k}'(s_3) + \right. \\ \left. (\sigma \mathbf{J}_q \circ \mathbf{k})(s_3) \cdot \frac{\partial(\mathbf{G}_x \circ \mathbf{k})^T(s_3)}{\partial s_3} \cdot \mathbf{k}'(s_3) + \right. \\ \left. (\sigma \mathbf{J}_q \circ \mathbf{k})(s_3) \cdot (\mathbf{G}_x \circ \mathbf{k})^T(s_3) \cdot \frac{\partial \mathbf{k}'(s_3)}{\partial s_3} \right) s_2 \end{aligned} \quad (5.26)$$

Trotz der Tatsache, dass die Trajektoriengenerierung im Zeitoptimalen auf eine schaltende Eingangsfunktion zurückgeführt werden kann, ist keine allgemeine analytische Lösung des Differentialgleichungssystem angebar. Die Lösung der Gleichungen muss daher numerisch geschehen und kann somit nicht im Regeltakt erfolgen. Beim Ansatz numerischer Methoden im Allgemeinen bieten auch direkte Lösungen des Optimierungsproblems einen Ansatz.

## 5.3 Vergleich zwischen Kompensation und Trajektorienanpassung

Die in den Abschnitten 5.1 und 5.2 vorgestellten Verfahren stellen zwei Möglichkeiten zum Rückfluss der durch den Beobachter gewonnenen Informationen in den Regelkreis dar. Die Nutzung der Informationen bei der Trajektoriengenerierung bietet die bessere Ausnutzung der möglichen Stellgrößen, da weniger Reserve bei der Begrenzung der Stellgröße berücksichtigt werden muss. Dem gegenüber steht, dass die Abbildung in den kartesischen Raum ohnehin unvollständig ist. Die vom Regler zusätzlich zur Linearisierung aufzubringenden Stellgrößen sind bei der Planung unberücksichtigt. Weiterhin berücksichtigt der Ansatz nur Reibkräfte entlang der Trajektorie, Querkräfte sind ebenfalls nicht berücksichtigt. Ein weiterer Punkt, der sich durch die numerische Auswertung des Optimierungsproblems ergibt, ist, dass Anpassungen zur Laufzeit bei sich ändernder Reibung nicht berücksichtigt werden können. Dies ist allerdings beim Einsatz der adaptronischen Gelenke auch während der Durchfahrt einer Trajektorie gewünscht.

Bei der Verwendung der Kompensation treten die zuletzt genannten Probleme so nicht auf. Die über die Jakobimatrizen eingekoppelte Reibkraft kann im Betrieb geändert werden, um Änderungen im geschätzten Parameter nachzufahren. Das Verfahren scheint daher für sich ändernde Konfigurationen eher geeignet zu sein. Die Planung der Trajektorien ändert sich dann nicht, bereits existierende Algorithmen können weiter verwendet werden. Die Vorsteuerung linearisiert die Strecke für die Regler zusätzlich mit, so dass auch hier der Entwurfsprozess nicht geändert werden muss.

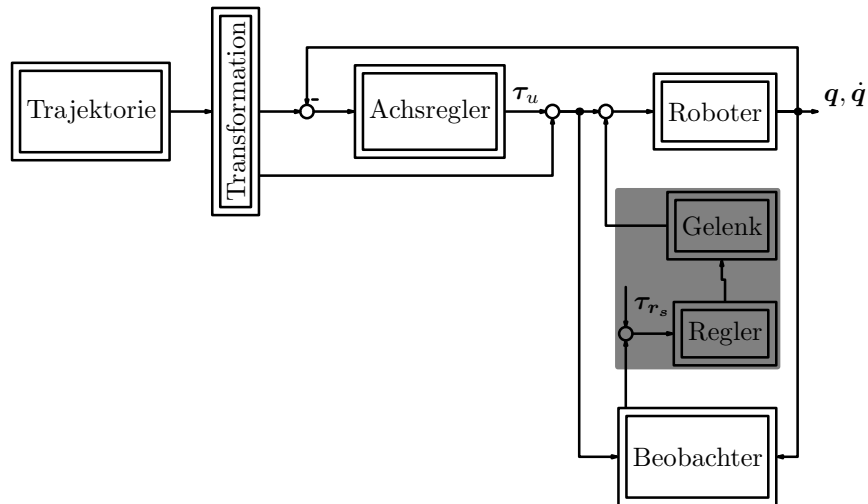


Abbildung 5.6: Regelkreis mit Beobachter im Regelkreis zur Ansteuerung der adaptronischen Gelenke

## 5.4 Regelung der adaptronischen Gelenke

Die in den bisherigen Abschnitten dieses Kapitels vorgestellten Nutzungsmöglichkeiten der durch die Beobachter gewonnenen Informationen über die Reibkräfte bzw. -momente in den passiven Gelenken bezogen sich auf die Aufrechterhaltung der Regelqualität der Starrkörperregelung. Der Eingriff der zusätzlichen Reibung in den Regelkreis führt zu größeren Abweichungen zwischen Modell und realem System, so dass die Vorsteuerung des Systems durch größere Eingriffe von den Achsreglern überlagert wird. Ein gänzlich anderer Aspekt ist die Nutzung der Reibinformationen zur Ansteuerung der adaptronischen Gelenke. Zwar stellen die integrierten Aktoren die Normalkraft im Lager, jedoch ist die gewünschte Zielgröße das Gelenkspiel bzw. die veränderte Reibung im Gelenk. Ist der gewünschte Zustand der Gelenke zwischen den Randwerten, Sperrung des Gelenks und geringstmögliche Anpressung, angesiedelt, lassen sich die Informationen aus dem Beobachter als Istwerte für eine Regelung nutzen. Zusammen mit der Starrkörperregelung des Roboters ergibt sich damit der in Abbildung 5.6 dargestellte Regelkreis. Die Einkopplung der Momente ist hier als direkte Beeinflussung der Stellmomente dargestellt, da die adaptronischen Gelenke im Allgemeinen nicht die angetriebenen Gelenke des Roboters sind, ist eine Transformation vorzusehen, die hier dem nichtlinearen Block „Gelenke“ zugerechnet ist. Damit schließt sich ein zusätzlicher Regelkreis über den Beobachter und die adaptronischen Gelenke samt Regler. Da im Nichtlinearen das Separationstheorem für den Betrieb eines Reglers über einen Beobachter nicht mehr gilt, ist in die Stabilität gesondert zu untersuchen.

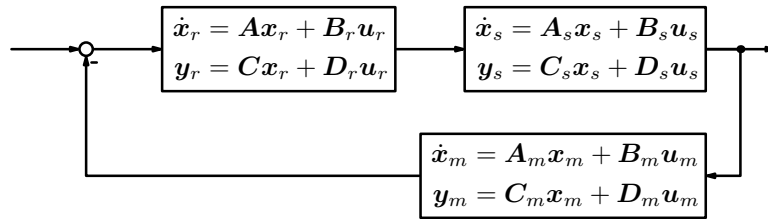


Abbildung 5.7: Regelkreis der Gelenke bestehend aus den linearen Systemen der Regler (Index  $r$ ), der Gelenke (Index  $s$ ) und der Messung (Index  $m$ ).

### 5.4.1 Stabilität bei Beobachtung im Regelkreis

Die Stabilitätsuntersuchung erfolgt für beide Regelkreise getrennt, zum einen die Stabilität des Regelkreises zum Stellen der adaptronischen Gelenke und zum anderen die Starrkörperregelung. Beide Systeme sind durch den Einfluss der Gelenke auf die dynamischen Gleichungen des Roboters miteinander verkoppelt.

Eine unmittelbare Rückwirkung der Starrkörperregelung auf den Regelkreis der Gelenke existiert jedoch nicht. Falls die Reibungskräfte im Gelenk direkt gemessen werden, ist der Regelkreis von der Starrkörperregelung unbeeinflusst. Die Kopplung entsteht demnach nur durch den Einsatz des Beobachters zur Bestimmung der im System auftretenden Störgröße. Da der Beobachter eine lineare Fehlerdynamik besitzt, und diese nicht durch die Stellgröße der Starrkörperregelung verändert wird, lässt sich sein Einfluss auf den Gelenkregelkreis durch ein lineares System, entkoppelt von der Starrkörperregelung, beschreiben

$${}^{zrd}\tilde{\mathbf{x}}_3 = {}^{zrd}\mathbf{x}_3 - {}^{zrd}\hat{\mathbf{x}}_3 \Leftrightarrow {}^{zrd}\hat{\mathbf{x}}_3 = {}^{zrd}\mathbf{x}_3 - {}^{zrd}\tilde{\mathbf{x}}_3, \quad (5.27)$$

wobei alle Größen eine lineare Dynamik besitzen. Dabei wurden für die Modellierung der Strecke im Gelenk lineare Modelle vorausgesetzt. In diesem Fall bringt der Beobachter also eine zusätzliche Dynamik in den Regelkreis ein, die aber von den Zuständen der Starrkörperregelung nicht beeinflusst wird, mit Ausnahme derjenigen Zustände in denen eine Schätzung nicht möglich ist. Dies ist neben singulären Posen des Roboters insbesondere bei Gelenkgeschwindigkeiten von Null der Fall. Mit einer linearen Regelstrecke der Adaptronik, wie sie zum Beispiel auch in [57] angesetzt ist, und einem linearen Regleransatz ergibt sich für den gesamten Regelkreis das Ersatzsystem nach Abbildung 5.7. Da die Regelung der Gelenke untereinander entkoppelt ist, also keine Rückwirkungen bestehen, ist eine separate Untersuchung möglich.

Die Stabilisierbarkeit der um eine Messdynamik erweiterten Strecke wird im Zustandsraum untersucht. Dazu wird die Steuerbarkeit und die Beobachtbarkeit der Systeme im Verbund analysiert. Ist das verkettete System steuer- und beobachtbar, so lässt sich dafür ein Regler konstruieren der das System stabilisiert. Grundvoraussetzung dafür ist, dass beide Systeme

für sich jeweils steuer- und beobachtbar sind. Als Kriterium zur Prüfung der Eigenschaften werden die von Kalman definierten Rangbedingungen der Steuer- bzw. Beobachtbarkeitsmatrix verwandt, siehe z.B. [11]

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_s &= \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{B}\mathbf{A} & \dots & \mathbf{B}\mathbf{A}^{n-1} \end{bmatrix} & \mathbf{Q}_b &= \begin{bmatrix} \mathbf{C}^T & (\mathbf{C}\mathbf{A})^T & \dots & (\mathbf{C}\mathbf{A}^{n-1})^T \end{bmatrix}^T \\ \text{Rang}(\mathbf{Q}_s) &= n & \text{Rang}(\mathbf{Q}_b) &= n. \end{aligned} \quad (5.28)$$

Aus den Teilforderungen gilt also für die beiden Systeme

$$\begin{aligned} \text{Rang} \left( \begin{bmatrix} \mathbf{B}_s & \dots & \mathbf{B}_s \mathbf{A}_s^{n-1} \end{bmatrix} \right) &= n_s & \text{Rang} \left( \begin{bmatrix} \mathbf{B}_m & \dots & \mathbf{B}_m \mathbf{A}_m^{n-1} \end{bmatrix} \right) &= n_m \\ \text{Rang} \left( \begin{bmatrix} \mathbf{C}_s \\ \vdots \\ \mathbf{C}_s \mathbf{A}_s^{n-1} \end{bmatrix} \right) &= n_s & \text{Rang} \left( \begin{bmatrix} \mathbf{C}_m \\ \vdots \\ \mathbf{C}_m \mathbf{A}_m^{n-1} \end{bmatrix} \right) &= n_m. \end{aligned} \quad (5.29)$$

Die Verkettung beider Systeme gemäß Abbildung 5.7 bildet sich in der Zustandsraumdarstellung durch die folgenden Matrizen ab

$$\mathbf{A}_g = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_s & \mathbf{0} \\ \mathbf{B}_m \mathbf{C}_s & \mathbf{A}_s \end{bmatrix} \quad \mathbf{B}_g = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_s \\ \mathbf{B}_m \mathbf{D}_s \end{bmatrix} \quad \mathbf{C}_g = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_m \mathbf{C}_s & \mathbf{C}_m \end{bmatrix}.$$

Die Überprüfung der Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit des Systems mittels des Kalmankriteriums Gleichung (5.28) liefert für die Steuerbarkeitsbedingung die folgende Matrix, deren Rang zu überprüfen ist

$$\mathbf{Q}_s = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_s & \mathbf{B}_s \mathbf{A}_s & \dots & \mathbf{B}_s \mathbf{A}_s^{n_x-1} + \mathbf{A}_m \mathbf{B}_m \mathbf{D}_s \\ \mathbf{0} & \mathbf{B}_m \mathbf{C}_s \mathbf{B}_s & \dots & \mathbf{A}_m^{n_x-1} \mathbf{B}_m \mathbf{D}_s + \sum_{i=1}^{n_x-1} \mathbf{A}_m^{n_x-i-1} \mathbf{B}_m \mathbf{C}_s \mathbf{A}_s^{i-1} \mathbf{B}_s \end{bmatrix}, \quad (5.30)$$

wobei  $n_x = n_s + n_m$  die Ordnung des gesamten Systems ist. Die ersten  $n_s$  Spalten liefern durch die Voraussetzung der Steuerbarkeit, Gleichung (5.29), der Einzelsysteme  $n_s$  linear unabhängige Vektoren. Für die übrigen  $n_m$  Spalten muss nun die lineare Unabhängigkeit der Vektoren durch die unteren Teilvektoren sichergestellt werden. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit liege das System  $s$  in Beobachternormalform vor, dann ist die Ausgangsmatrix festgelegt. Im Falle der hier vorliegenden SISO-Systeme entspricht sie der Matrix  $\mathbf{C}_s = [0, \dots, 0, 1]$ , d.h. die letzte Zeile des Produktes  $\mathbf{A}_s^{i-1} \mathbf{B}_s$  wird ausgewählt, in diesem Fall ist dies eine  $1 \times 1$ -Matrix. Damit schreibt sich die Summe der letzten Zeile als Linearkombination der Vektoren  $\mathbf{A}_m^{n_x-i-1} \mathbf{B}_m$ , die für  $i > n_s$  genau denen der Steuerbarkeitsmatrix des mit Index  $m$  bezeichneten Systems entsprechen. Mit fortschreitendem Index steigt die Zahl der

verwendeten Vektoren. Kommt es nicht zu einer Multiplikation mit Null, so ist dieses System auch linear unabhängig und die Matrix hat Höchstrang. Die Beobachtbarkeit des Systems ergibt sich analog. Die Matrix für die Rangbedingung lautet

$$Q_b = \begin{bmatrix} D_m C_s & C_m \\ A_s D_m C_s + C_m B_m C_s & C_m A_m \\ \vdots & \vdots \\ A_s^{n_x-1} D_m C_s + \sum_{i=1}^{n_x-1} C_m A_m^{n_x-i-1} B_m C_s A_s^{i-1} & C_m A_m^{n_x-1} \end{bmatrix} \quad (5.31)$$

Die ersten  $n_m$  Zeilen sind durch die Voraussetzung nach Gleichung (5.29) linear unabhängig. Das Messsystem liege o. B. d. A. in Regelungsnormalform vor. Dann ist  $B^T = [0, \dots, 0, 1]$  und es folgt der gleiche Schluss wie bei der Steuerbarkeit. Erfüllt die Verkettung beider Systeme die Voraussetzungen, so existiert ein stabilisierender Regler, der jedoch vom ursprünglichen System verschieden sein kann. Problematisch sind solche Fälle, bei denen sich instabile Dynamiken verdecken. Ist der Beobachter minimalphasig, kann dies jedoch nicht passieren. Da das System steuer- und beobachtbar ist, existiert insbesondere auch ein stabilisierender Zustandsregler.

### Kombiniertes System aus Strecke und Gelenken

Die Analyse des vorigen Abschnitts zeigt, dass i. Allg. ein stabilisierender Regler für das Gelenksystem gefunden werden kann. Der nächste Schritt untersucht die Auswirkung auf das Gesamtsystem. Damit erweitert sich die Differentialgleichung um die Zustände der Gelenke. Das neue System ergibt sich demnach zu

$$\begin{bmatrix} {}^{zrd} \mathbf{x}_1 \\ {}^{zrd} \mathbf{x}_2 \\ \boldsymbol{\sigma} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^{zrd} \mathbf{x}_2 \\ -\mathbf{M}_q^{-1} \boldsymbol{\eta} + \mathbf{M}_q^{-1} \boldsymbol{\tau}_d + \mathbf{M}_q^{-1} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{J}_q^T \mathbf{C}_s \boldsymbol{\sigma} \\ \mathbf{A}_s \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{B}_s \mathbf{u}_\sigma \end{bmatrix}. \quad (5.32)$$

Dabei ergibt sich die Stellgröße für die Gelenke aus den durch den Beobachter geschätzten Reibwerten multipliziert mit der entsprechenden Rückführmatrix. Die vorliegende Systemordnung ist, je nach Modellierung der Gelenke, größer oder gleich der in Abschnitt 4.5 zum Beobachterentwurf angenommenen. Durch die Beschreibung als lineares System ist die Transformationsvorschrift jedoch immer noch angebbar. Die Einkopplung der Zustandsgrößen der adaptronischen Gelenke in die Starrkörperregelung bleibt unverändert. Das Gesamtsystem umfasst weiterhin die Zustände des Beobachters und die Zustände des Reglers zur Regelung des Starrkörpersystems.

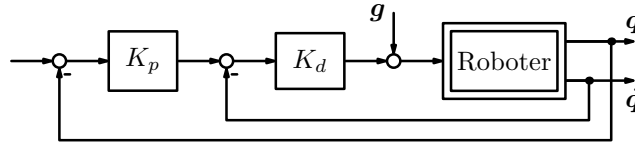


Abbildung 5.8: Angenommene Struktur der Regelung zur Stabilisierung des Starrkörpersystems mittels Ausgangsrückführung

**Stabilisierung mit PD-Regler** Zunächst wird die Stabilisierung des Gesamtsystems mit Hilfe eines PD-Reglers bzw. einer Ausgangsrückführung untersucht. Die Analyse dieses Regleransatzes bei mechanischen Systemen und insbesondere bei Robotern ist umfassend in der Literatur beschrieben, siehe z. B. [58]. Die Stabilität des Systems lässt sich mittels der direkten Methode von Lyapunov [59] überprüfen. Dabei wird für das mechanische System direkt die Energiefunktion als Kandidat für die Lyapunovfunktion gewählt, analog zu der Theorie dissipativer Systeme, die diese Speicherfunktionen als mögliche Lyapunovfunktionen propagiert ([60]). Damit ergibt sich als Kandidat für das mechanische Teilsystem

$$V_{rob} = E_{kin}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + E_{pot}(\mathbf{q}) = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \cdot \mathbf{M}_q(\mathbf{q}) \cdot \dot{\mathbf{q}} + E_{pot}(\mathbf{q}). \quad (5.33)$$

Die Funktion ist, bei geeigneter Wahl des Bezugspunktes der potentiellen Energie und auf Grund der positiven Definitheit der Massenmatrix, stets positiv. Die im mechanischen System enthaltene Energie ist dabei natürlich unabhängig von der Reibung. Bei der vorliegenden Stabilisierung des Systems operieren die Regler auf Achsebene und können daher individuell behandelt werden. Zwar bringt die Ausgangsrückführung nach Abbildung 5.8 selbst keine weiteren Zustände in das System ein, dennoch wird die Lyapunovfunktion des Systems ergänzt

$$V_{ctrl} = E_{pot}(\mathbf{q}) - E_{pot}(\mathbf{q}_s) + \mathbf{g}_q^T(\mathbf{q}_s) \cdot (\mathbf{q} - \mathbf{q}_s) + (\mathbf{q} - \mathbf{q}_s)^T \cdot \mathbf{P}_s \cdot (\mathbf{q} - \mathbf{q}_s), \quad (5.34)$$

wobei der Index  $s$  die Zielkoordinaten des Systems darstellt. Die noch nicht näher bestimmte Matrix  $\mathbf{P}_s$  ist symmetrisch und positiv definit. Der Beweis, dass die Funktion  $V_{ctrl}$  größer als Null ist und somit die Bedingung für eine Lyapunovfunktion erfüllt, kann durch die Anwendung des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung erfolgen [61, 62]. Zusammen mit

der Abkürzung  $\Delta \mathbf{q} = \mathbf{q} - \mathbf{q}_s$  folgt

$$\begin{aligned}
 V_{ctrl} &= E_{pot}(\mathbf{q}) - E_{pot}(\mathbf{q}_s) + \mathbf{g}_q^T(\mathbf{q}_s) \cdot \Delta \mathbf{q} + \Delta \mathbf{q}^T \mathbf{P}_s \Delta \mathbf{q} \\
 &\quad \left| \begin{array}{l} \text{mit } f(a+b) = f(a) + f'(a + \nu(b-a)) \cdot (b-a), \quad \nu \in [0;1] \\ = E_{pot}(\mathbf{q}_s) + \mathbf{g}_q^T(\mathbf{q}_s + \nu \Delta \mathbf{q}) \Delta \mathbf{q} - E_{pot}(\mathbf{q}_s) + \mathbf{g}_q^T(\mathbf{q}_s) \Delta \mathbf{q} + \Delta \mathbf{q}^T \mathbf{P}_s \Delta \mathbf{q} \\ = \mathbf{g}_q^T(\mathbf{q}_s - \nu \Delta \mathbf{q}) \Delta \mathbf{q} + \mathbf{g}_q^T(\mathbf{q}_s) \Delta \mathbf{q} + \Delta \mathbf{q}^T \mathbf{P}_s \Delta \mathbf{q} \\ = \Delta \mathbf{q}^T \nabla \mathbf{g}_q(\mathbf{q}_z) \nu \Delta \mathbf{q} + \Delta \mathbf{q}^T \mathbf{P}_s \Delta \mathbf{q} = \Delta \mathbf{q}^T (\mathbf{P}_s + \nabla \mathbf{g}_q(\mathbf{q}_z) \nu) \Delta \mathbf{q}. \end{array} \right.
 \end{aligned}$$

Die Funktion ist genau dann stets positiv, wenn die Matrix  $\mathbf{P}_s + \nabla \mathbf{g}_q(\mathbf{q}_z) \nu$  der letzten quadratischen Form positiv definit ist. Daraus folgt eine Bedingung an die Matrix  $\mathbf{P}_s$  die als Parameter zur Verfügung steht. Die Sicherstellung der Definitheit durch den Parameter  $\mathbf{P}_s$  setzt voraus, dass die Verstärkung der von den generalisierten Koordinaten abhängigen Matrix  $\mathbf{g}_q(\mathbf{q})$  beschränkt ist. Ihr größter Singulärwert ist also durch eine konstante obere Schranke abschätzbar:  $\|\nabla \mathbf{g}_q(\mathbf{q})\|_\infty \leq \gamma_{max}$ , siehe [61]. Diese Aussage gilt für serielle Manipulatoren, für parallele jedoch nicht. Bei Annäherung an Singularitäten des Typs 2 sind die durch die Gravitation erzeugten Kräfte unbeschränkt.

**Beispiel 6** Für die parallele Kinematik nach Abbildung 5.9a gilt für die potentielle Energie und ihre Ableitungen in generalisierten Koordinaten

$$\begin{aligned}
 E_{pot}(x) &= mg \sin(\arccos(x/(4l))) = mg \sqrt{1 - (x/(4l))^2} \\
 g_x = E'_{pot} &= x \left( 4l^2 \sqrt{16 - (x/l)^2} \right)^{-1} \quad \nabla g_x = E''_{pot} = 4 \left( (16l^2 - x^2) \sqrt{16 - (x/l)^2} \right)^{-1}.
 \end{aligned}$$

Der Grenzwert beider Funktionen ist bei Annäherung an die Singularität nicht beschränkt, siehe auch Abbildung 5.9b

$$\lim_{x \rightarrow 4l} g_q = \infty \qquad \lim_{x \rightarrow 4l} \nabla g_q = \infty. \quad \square$$

Die singulären Stellungen treten jedoch im normalen Betrieb nicht auf, da der Roboter dann nicht mehr vollständig steuerbar ist. Die Beschränkung der Mannigfaltigkeit auf einen Bereich mit hinreichendem Abstand zu den Singularitäten erlaubt dann wieder eine Abschätzung der obigen Funktionen mittels des größten Singulärwerts der Matrix. Es existiert demnach stets eine Matrix  $\mathbf{P}_s$ , so dass die Lyapunovfunktion in Abbildung 5.8 immer positiv ist.

Beim Beobachter wird die lineare Fehlerdynamik ausgenutzt. Für den Beobachterfehler  $\mathbf{w} = {}^{enf}\mathbf{x} - {}^{enf}\hat{\mathbf{x}}$  gilt die lineare Differentialgleichung nach Definition 6. Da die Matrix  $\mathbf{A}$

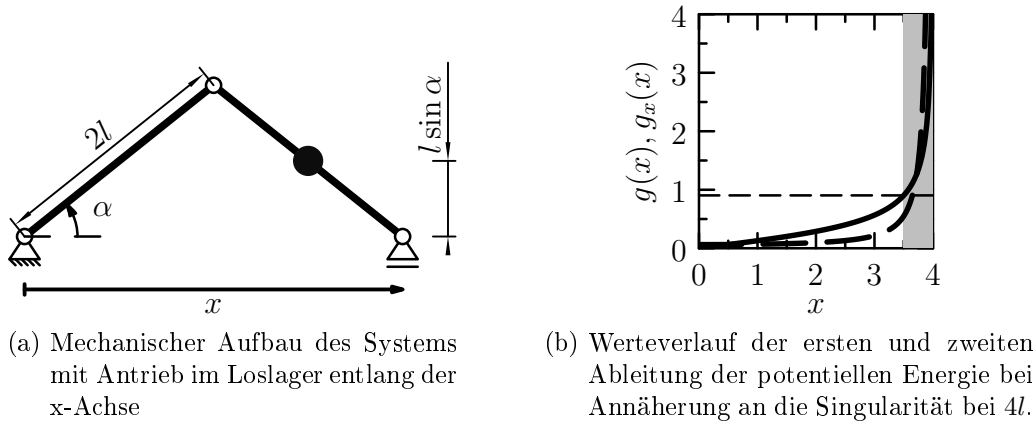


Abbildung 5.9: Parallelstruktur in Beispiel 6

durch den Entwurf nur Eigenwerte mit negativen Realteil besitzt, hat die Gleichung

$$\mathbf{P}_b \mathbf{A} + \mathbf{A}^T \mathbf{P}_b = -\mathbf{Q}_b \quad (5.35)$$

mit positiv semidefiniter Matrix  $\mathbf{Q}_b$  eine eindeutige Lösung für die Matrix  $\mathbf{P}$ , siehe [59]. Die Lösung ist positiv definit. Das Gleiche gilt für das stabilisierte System der Gelenke. Da auch hier keine Beeinflussung durch die Starrkörperregelung vorliegt und das System mit Regelung stabil ist, existiert auch hier eine quadratische Form mit den obigen Eigenschaften

$$\mathbf{P}_g \mathbf{A}_g + \mathbf{A}_g^T \mathbf{P}_g = -\mathbf{Q}_g. \quad (5.36)$$

Mit diesen Überlegungen zu den beteiligten Teilsystemen kann nun die Lyapunovfunktion für das gesamte System aufgestellt werden. Dabei wird der Term der potentiellen Energie aus Gleichung (5.33) gestrichen, da er in der Funktion  $V_{ctrl}$  berücksichtigt wird. Durch die Teilfunktionen sind sämtliche Zustände des Systems in der Funktion enthalten, so dass die Summenfunktion ein Kandidat für eine Lyapunovfunktion ist

$$V = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M}_q(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} + E_{pot}(\mathbf{q}) - E_{pot}(\mathbf{q}_s) + \mathbf{g}_q^T(\mathbf{q}_s) \Delta \mathbf{q} \dots \\ + \Delta \mathbf{q}^T \mathbf{P}_s \Delta \mathbf{q} + \frac{1}{2} \mathbf{w}^T \mathbf{P}_b \mathbf{w} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{P}_g \boldsymbol{\sigma}. \quad (5.37)$$

Zur Überprüfung der Stabilität muss die Funktion  $V$  nach der Zeit abgeleitet und ihre Eigenschaft überprüft werden

$$\dot{V} = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \dot{\mathbf{M}}_q(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M}_q(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}_q^T(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}_q^T(\mathbf{q}_s) \dot{\mathbf{q}} + 2 \Delta \mathbf{q}^T \mathbf{P}_s \dot{\mathbf{q}} \dots \\ - \mathbf{w}^T \mathbf{Q}_b \mathbf{w} - \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{Q}_g \boldsymbol{\sigma}, \quad (5.38)$$



wobei hier die Eigenschaft, dass sämtliche Matrizen der quadratischen Formen symmetrisch sind, zur Vereinfachung herangezogen wurde. Die abgeleiteten Zustandsgrößen lassen sich durch die rechte Seite der Systemdifferentialgleichungen ersetzen, um die Abhängigkeit der Ableitung der Lyapunovfunktion ausschließlich von den Zuständen des Gesamtsystems zu erreichen. Für das durch Regler und Vorsteuerung generierte Antriebsmoment gilt

$$\tau_d = \mathbf{g}_q(\mathbf{q}_s) - (\mathbf{K}_p + \mathbf{K}_v)\Delta\mathbf{q} - \mathbf{K}_v\dot{\mathbf{q}}, \quad (5.39)$$

wobei durch die erwähnte Unabhängigkeit der Regler die Verstärkungsmatrizen nur auf der Hauptdiagonalen besetzt sind  $\mathbf{K}_i = \text{diag}(\mathbf{k}_i)$ . Für die Ableitung der Lyapunovfunktion gilt mit dieser Gleichung

$$\begin{aligned} \dot{V} = & \frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}^T \dot{\mathbf{M}}_q(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{q}}^T (\mathbf{g}_q(\mathbf{q}_s) - (\mathbf{K}_p + \mathbf{K}_v)\Delta\mathbf{q} - \mathbf{K}_v\dot{\mathbf{q}} - \mathbf{C}_q\dot{\mathbf{q}} - \mathbf{g}_q + {}^\sigma\mathbf{J}_q^T\boldsymbol{\sigma}) \quad \dots \\ & + \mathbf{g}_q^T(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}_q^T(\mathbf{q}_s)\dot{\mathbf{q}} + 2\Delta\mathbf{q}^T \mathbf{P}_s\dot{\mathbf{q}} - \mathbf{w}^T \mathbf{Q}_b \mathbf{w} - \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{Q}_g \boldsymbol{\sigma}. \end{aligned} \quad (5.40)$$

In der obigen Gleichung kann die Eigenschaft mechanischer Systeme ausgenutzt werden, das gilt  $\dot{\mathbf{q}}^T (\dot{\mathbf{M}}_q - 2 \cdot \mathbf{C}_q) \dot{\mathbf{q}} = 0$ , siehe [63]. Weiterhin kompensieren sich die Terme, die den Vektor der Gravitationskräfte enthalten, so dass folgende Gleichung übrig bleibt

$$\begin{aligned} \dot{V} = & -\dot{\mathbf{q}}^T (\mathbf{K}_p + \mathbf{K}_v)\Delta\mathbf{q} - \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{K}_v\dot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{q}}^T {}^\sigma\mathbf{J}_q^T\boldsymbol{\sigma} + 2\Delta\mathbf{q}^T \mathbf{P}_s\dot{\mathbf{q}} - \mathbf{w}^T \mathbf{Q}_b \mathbf{w} - \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{Q}_g \boldsymbol{\sigma} \\ = & -\dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{K}_v\dot{\mathbf{q}} - \mathbf{w}^T \mathbf{Q}_b \mathbf{w} - \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{Q}_g \boldsymbol{\sigma} + \dot{\mathbf{q}}^T (-\mathbf{K}_p - \mathbf{K}_v + 2\mathbf{P}_s)\Delta\mathbf{q} + \dot{\mathbf{q}}^T {}^\sigma\mathbf{J}_q^T\boldsymbol{\sigma}. \end{aligned} \quad (5.41)$$

Für die Reibung gilt  $\boldsymbol{\sigma} = -\text{diag}(\mathbf{k}) \text{sgn}({}^\sigma\mathbf{J}_q\dot{\mathbf{q}})$  und damit

$$\begin{aligned} \dot{V} = & -\mathbf{w}^T \mathbf{Q}_b \mathbf{w} - \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{Q}_g \boldsymbol{\sigma} - \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{K}_v\dot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{q}}^T (-\mathbf{K}_p - \mathbf{K}_v + 2\mathbf{P}_s)\Delta\mathbf{q} \quad \dots \\ & - \dot{\mathbf{q}}^T {}^\sigma\mathbf{J}_q^T \text{diag}(\mathbf{k}) \text{sgn}({}^\sigma\mathbf{J}_q\dot{\mathbf{q}}). \end{aligned} \quad (5.42)$$

Die positiv definite aber ansonsten frei wählbare Matrix  $\mathbf{P}_s$  ist so zu wählen, dass der Kreuzterm in der obigen Gleichung herausfällt  $\mathbf{P}_s = (\mathbf{K}_p + \mathbf{K}_v)/2$ . Die ersten beiden Summanden der obigen Gleichung sind nach (5.35) und (5.36) stets negativ, der Dritte ist bei positiven Verstärkungen der Regler ebenfalls negativ. Da die Reibung ihrem Wesen nach stets dissipativ ist, sind die Elemente des Vektors  $\mathbf{k}$  sämtlich größer Null. Ein einzelner Term der quadratischen Form ist mit  $-\langle {}^\sigma\mathbf{J}_q\dot{\mathbf{q}} \rangle_i k_i \langle \text{sgn}({}^\sigma\mathbf{J}_q\dot{\mathbf{q}}) \rangle_i$  stets kleiner oder gleich Null. Somit ist die Funktion  $\dot{V}$  negativ semidefinit und die Stabilität des Systems sichergestellt. Da die Position nicht in der Ableitung auftaucht, kann nicht auf einen verschwindenden Regelfehler geschlossen werden.

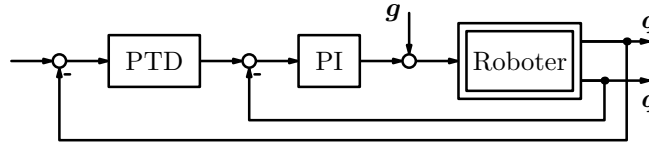


Abbildung 5.10: Angenommene Struktur der Regelung zur Stabilisierung des Starrkörpersystems mit Integralanteil

**Stabilisierung durch Regler mit I-Anteil** Um Mängel im Modell zu beseitigen und stationäre Genauigkeit zu erzielen, enthält das lineare Regelgesetz meist integrierende Anteile. Bei den vorliegenden Systemen kommt eine Reglerkaskade aus PT<sub>1</sub>D- und PI-Regler zum Einsatz, wie in Abbildung 5.10 (siehe [29]). Analog zum PD-Regler ist auch hier die Kompensation der Gravitation vorgesehen und die linearen Regler arbeiten separat auf den ihnen zugeordneten Achsen.

Betrachtet man den linearen Anteil der Regler, so lassen sich diese im Frequenzbereich analysieren. Da Geschwindigkeit und Positionssignale als Eingänge dienen, handelt es sich um ein Mehrgrößensystem. Das Ausgangssignal der Kaskade setzt sich im Frequenzbereich demnach wie folgt zusammen

$$U(s) = G_{pi} \cdot E_1(s) + G_{ptd} \cdot G_{pi} \cdot E_2(s), \text{ mit } G_{pi} = V_i \frac{T_i s + 1}{T_i s}, G_{ptd} = V_p \frac{T_z s + 1}{T_n s + 1}. \quad (5.43)$$

Bei den zu Grunde gelegten Entwurfsregeln der Reglerkaskade kompensieren sich die Polstelle des PT<sub>1</sub>D-Reglers und die Nullstelle des PI-Reglers im Frequenzbereich  $T_n = T_i$ , siehe [64]. Weiterhin gilt bei Regelung auf einen Endwert<sup>1</sup> zwischen den Fehlergrößen der Zusammenhang  $s \cdot E_2(s) = E_1(s)$ . Damit ergibt sich für das Übertragungsverhalten

$$\begin{aligned} U(s) &= V_i \frac{T_i s + 1}{T_i s} \cdot s \cdot E_2(s) + V_p \frac{T_z s + 1}{T_i s + 1} \cdot V_i \frac{T_i s + 1}{T_i s} \cdot E_2(s) \\ &= \left( V_i s + \frac{V_i + V_i V_p T_z}{T_i} + \frac{V_i V_p}{T_i s} \right) \cdot E_2(s). \end{aligned} \quad (5.44)$$

Die Übertragungsfunktion aus Gleichung (5.44) entspricht derjenigen eines idealen PID-Reglers. Dies erlaubt die entsprechenden Stabilitätsbeweise für Roboter mit dieser Reglerart auf das vorliegende Problem anzupassen. Die Stabilitätsuntersuchungen setzen dabei i. Allg. die Messung von Position und Geschwindigkeit voraus, so dass kein echter differenzierender Term vorliegt. Für die weiteren Rechnungen werden Ersatzkonstanten eingeführt, um die

<sup>1</sup>Dieser Zusammenhang gilt stets für die aus der Maschine rückgeführten Istwerte, da hier Geschwindigkeit und Position im physikalischen Zusammenhang stehen. Für die Sollwerte hingegen gilt der Zusammenhang nur bei entsprechender Vorsteuerung der Geschwindigkeitswerte. Ist der Positionswert unveränderlich, ist diese Vorsteuerung Null.

Verstärkungen abzukürzen

$$K_d = V_i \quad K_p = \frac{V_i + V_i V_p T_z}{T_i} \quad K_i = \frac{V_i V_p}{T_i}.$$

Die Abbildung der Kaskade auf einen PID-Regler schließt nichtlineare Elemente der Kaskade, wie z. B. Begrenzungen in der Geschwindigkeit, aus. Mit Hilfe der obigen Definitionen ergibt sich das durch die Motoren erzeugte Moment bei Festpunktregelung im Zeitbereich zu

$$\tau_d = -K_d(\dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}_d) - K_p(\mathbf{q} - \mathbf{q}_d) - K_i \int_0^t (\mathbf{q} - \mathbf{q}_d) dt \quad (5.45)$$

Zum Nachweis der Stabilität kann der Ansatz aus [65] herangezogen werden. Dieser basiert auf der Aufteilung der beschreibenden Differentialgleichung in einen linearen Anteil und einem nichtlinearen Rest. Die Zustandsgrößen sind zur besseren Beschreibbarkeit der Matrizen umgruppiert, so dass die über Integration verbundenen Größen beieinander stehen. Die Zustandsgrößen sind als Differenzen zum Sollwert ausgewählt. Die Hinzunahme eines integralen Anteils im Regler bedingt die Erweiterung des Zustandsraumes

$$\mathbf{z}_i^T = \left[ \int_0^t \Delta q_i dt \quad \Delta q_i \quad \Delta \dot{q}_i \right] \Rightarrow \mathbf{z}^T = \left[ \mathbf{z}_1^T \quad \dots \quad \mathbf{z}_{n_{dof}}^T \right]. \quad (5.46)$$

Die Zustandsdifferentialgleichung wird umgeschrieben zu

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{N}_l \mathbf{z} + \mathbf{B} \mathbf{A} \mathbf{B}^T \mathbf{N}_l \mathbf{z} + \mathbf{B} \boldsymbol{\varphi}, \quad (5.47)$$

wobei  $\mathbf{N}_l$  und  $\mathbf{B}$  konstante Matrizen sind. Dadurch ergibt sich in der obigen Differentialgleichung ein linearer Anteil mit einem nichtlinearen Rest. Für die Definition sämtlicher Matrizen in Gleichung (5.47) wird zunächst eine konstante Diagonalmatrix  $\mathbf{D}_m$  eingeführt, die in Verbindung mit der Massenmatrix des Systems folgende Eigenschaft aufweist

$$\|\mathbf{M}_q^{-1}(\mathbf{M}_q - \mathbf{D}_m)\|_\infty = \alpha < 1.$$

Für symmetrische, positive definite Matrizen existiert stets eine Matrix, die obiges leistet.

BEWEIS Zunächst wird das Produkt innerhalb der Norm ausmultipliziert

$$\|\mathbf{M}_q^{-1}(\mathbf{M}_q - \mathbf{D}_m)\|_\infty = \|\mathbf{I} - \mathbf{M}_q^{-1} \mathbf{D}_m\|_\infty \quad (5.48)$$

Die unendlich Norm einer Matrix erlaubt die Abschätzung der maximalen Betragsänderung bei Multiplikation mit einem Vektor  $\|\mathbf{M}\mathbf{v}\|_2 \leq \|\mathbf{M}\|_\infty \|\mathbf{v}\|_2$ . Damit ist die Formulierung

äquivalent zu

$$\|(\mathbf{I} - \mathbf{M}_q^{-1} \mathbf{D}_m) \mathbf{v}\|_2 < \|\mathbf{v}\|_2 \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n,$$

wobei die Ungleichung für alle Vektoren erfüllt sein muss. Dann gilt

$$\begin{aligned} \|(\mathbf{I} - \mathbf{M}_q^{-1} \mathbf{D}_m) \mathbf{v}\|_2^2 &= (\mathbf{I} \mathbf{v} - \mathbf{M}_q^{-1} \mathbf{D}_m \mathbf{v})^\top (\mathbf{I} \mathbf{v} - \mathbf{M}_q^{-1} \mathbf{D}_m \mathbf{v}) \\ &= \mathbf{v}^\top \mathbf{v} - \mathbf{v}^\top \mathbf{M}_q^{-1} \mathbf{D}_m \mathbf{v} - \mathbf{v}^\top \mathbf{D}_m \mathbf{M}_q^{-1} \mathbf{v} + \mathbf{v}^\top \mathbf{D}_m \mathbf{M}_q^{-1} \mathbf{M}_q^{-1} \mathbf{D}_m \mathbf{v} < \mathbf{v}^\top \mathbf{v} \\ &\Leftrightarrow \mathbf{v}^\top (\mathbf{D}_m \mathbf{M}_q^{-1} \mathbf{M}_q^{-1} \mathbf{D}_m - (\mathbf{D}_m \mathbf{M}_q^{-1} + \mathbf{M}_q^{-1} \mathbf{D}_m)) \mathbf{v} < 0 \\ &\Leftrightarrow \mathbf{v}^\top (\varepsilon \mathbf{D}_m^* \mathbf{M}_q^{-1} \mathbf{M}_q^{-1} \varepsilon \mathbf{D}_m^* - (\varepsilon \mathbf{D}_m^* \mathbf{M}_q^{-1} + \mathbf{M}_q^{-1} \varepsilon \mathbf{D}_m^*)) \mathbf{v} < 0 \\ &\Leftrightarrow \varepsilon^2 \mathbf{v}^\top (\mathbf{D}_m^* \mathbf{M}_q^{-1} \mathbf{M}_q^{-1} \mathbf{D}_m^* - \varepsilon (\mathbf{D}_m^* \mathbf{M}_q^{-1} + \mathbf{M}_q^{-1} \mathbf{D}_m^*)) \mathbf{v} < 0. \end{aligned}$$

Da quadratische Formen nach unten in der Art  $\mathbf{v}^\top \mathbf{M} \mathbf{I} \mathbf{v} < \mathbf{v}^\top \mathbf{P} \mathbf{v}$  beschränkt sind, lässt sich immer ein  $\varepsilon$  finden, so dass die obige Ungleichung erfüllt ist. ■

**Bemerkung 3** Auch wenn die letzte Ungleichung im Beweis suggeriert, dass ein kleines  $\varepsilon$  die Gleichung immer erfüllt, so stellt dies nicht das Optimum da. Die Diagonalmatrix, die das kleinst mögliche  $\alpha$  erzeugt, muss durch Optimierung gefunden werden werden. □

Für die übrigen eingeführten Matrizen gelten die folgenden Definitionen

$$\begin{aligned} \mathbf{N}_l &= \begin{bmatrix} \mathbf{N}_{l,1} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ & \ddots & & \\ & \mathbf{0} & \ddots & \mathbf{0} \\ & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{N}_{l,n_{dof}} \end{bmatrix}, \mathbf{N}_{l,i} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\rho_{1,i} & -\rho_{2,i} & -\rho_{3,i} \end{bmatrix}, \begin{aligned} \rho_{1,j} &= K_{i,j}/d_{m|j,j} \\ \rho_{2,j} &= K_{p,j}/d_{m|j,j} \\ \rho_{3,j} &= K_{d,j}/d_{m|j,j} \end{aligned} \\ \mathbf{B} &= \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{B}_{n_{dof}} \end{bmatrix}, \mathbf{B}_i = \begin{bmatrix} \xleftarrow{i-1} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{n_{dof}-i} \mathbf{0}, \mathbf{A} = \mathbf{M}_q^{-1} (\mathbf{M}_q - \mathbf{D}_m) \\ \boldsymbol{\varphi} &= \mathbf{M}_q^{-1} (\mathbf{C}_q \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}_q - \mathbf{g}_q(\mathbf{q}_d) + \boldsymbol{\tau}_f) \quad \text{mit} \quad \|\boldsymbol{\varphi}\|_2 = \alpha_0 + \alpha_1 \|\mathbf{z}\|_2 + \alpha_2 \|\mathbf{z}\|_2^2. \end{aligned}$$

Die Abschätzung der Norm von  $\boldsymbol{\varphi}$  ist möglich, da alle Summanden entweder beschränkt sind, oder zumindest sich durch das Produkt aus einer Konstanten und der 2-Norm des Zustandsvektors beschreiben lassen. Für die Massenmatrix und den Vektor der Gravitationskräfte sind bereits obere Schranken der Normen genannt. Für die Coriolismatrix findet sich ähnliches in der Literatur [66]  $\|\mathbf{C}_q \dot{\mathbf{q}}\|_2 \leq k_c \|\dot{\mathbf{q}}\|_2^2$ . Weiterhin werden spezifische Schranken für die Sollwerte eingeführt. Bei Beschränkung auf konstante Zielvorgaben fallen diese jedoch

heraus. Die Abschätzung der nichtlinearen Funktion lässt sich weiter verfeinern

$$\begin{aligned}
\|M_q^{-1}C_q\dot{\mathbf{q}}\|_2 &\leq \alpha_c\|\dot{\mathbf{q}}\|_2^2 = \alpha_c\|\Delta\dot{\mathbf{q}}\|_2^2 \leq \alpha_c\|\mathbf{z}\|_2^2 \\
\|M_q^{-1}(\mathbf{g}_q - \mathbf{g}_q(\mathbf{q}_d))\|_2 &\leq \alpha_g\|\mathbf{q} - \mathbf{g}_q(\mathbf{q}_d)\|_2 + \alpha_{gx} = \alpha_g\|\Delta\mathbf{q}\|_2 + \alpha_{gx} \leq \alpha_g\|\mathbf{z}\|_2 + \alpha_{gx} \\
\|M_q^{-1}\boldsymbol{\tau}_f\|_2 &= \alpha_f \\
\Rightarrow \alpha_0 &= \alpha_{gx} + \alpha_f \quad \alpha_1 = \alpha_g \quad \alpha_2 = \alpha_c
\end{aligned}$$

Bei der Abschätzung der Reibkräfte ist zu beachten, dass nicht nur die maximale Kraft abzuschätzen ist, sondern auch die maximale Transformation auf die Motoren. Treten die Kräfte in den passiven Gelenken auf, so muss die Übersetzung der Kräfte auf die Antriebskoordinaten mittels der Jakobimatrix berücksichtigt werden. Hier gilt bei der Beschränkung ähnliches wie bei den Gravitationskräften: Ein hinreichender Abstand zu Singularitäten muss gewährleistet sein, sonst sind die transformierten Kräfte unbeschränkt.

Für die Beschränkung der durch die Gravitation verursachten Kräfte gelten die beim Einsatz des PD-Reglers gemachten Bemerkungen. In der Nähe von Singularitäten des Typs 2 ist eine Beschränkung der Kräfte nach oben nur bei Einhaltung eines Abstands möglich. Die Forderung, dass die Regler in allen Achsen gleiches Verhalten besitzen ist bei Parallelrobotern ohne weiteres gegeben, da die Achsen im Normalfall symmetrisch sind. Damit sind die Koeffizienten  $\alpha_i, i \in \{1, 2, 3\}$  definiert und der Stabilitätsnachweis nach [65] anwendbar. Die Stabilität ist hierbei, im Gegensatz zu den vorherigen Kapiteln, von lokaler Natur. Der Einzugsbereich liegt nur in einer Umgebung des Endwertes, nicht für den gesamten Parameterraum. Der Beweis beinhaltet auch, dass eine Abschätzung der Regelung bei veränderlichen Werten der  $\alpha_i, i \in \{1, 2, 3\}$  möglich ist. Je größer die einzelnen Werte sind, desto mehr schränkt sich das Stabilitätsgebiet, insbesondere für die Zustände des Integralanteils im Regler, ein. Sind die Regelparameter im Betrieb nicht veränderlich, so ist die Auslegung einer stabilen Regelung für den Maximalwert der Reibung möglich, der dann auch für die anderen Fälle gilt. Intuitiv ist auch nachvollziehbar, dass größere Reibmomente bzw. Reibkräfte die Stabilitätsregion eines PID-Reglers einschränken.



## 6 Experimentelle Ergebnisse

Die in Kapitel 4 vorgestellten Verfahren zur Detektion der Reibkraft bei Systemen die durch die allgemeine dynamische Gleichung (4.1) beschrieben sind, sollen nun konkret angewandt werden. Dabei wird der Ansatz zunächst in der Simulation, dann am realen Roboter eingesetzt.

### 6.1 Versuchsaufbau

Der Parallelroboter FÜNFGELENK dient als Plattform für die in diesem Kapitel durchgeführten Implementierungen. Der Roboter besitzt zwei Freiheitsgrade in der Ebene. Abbildung 6.1 zeigt den Manipulator und eine Skizze des maximalen Arbeitsraumes. Die kinematischen und kinetischen Daten des Versuchsträgers finden sich in Tabelle 6.1 wieder.

Die Steuerung des Manipulators ist auf einem PC implementiert, der mit dem Echtzeitbetriebssystem QNX betrieben wird. Die in die Steuerung integrierte unterlagerte Antriebsregelung ist ebenfalls vollständig auf dem PC implementiert. Dies gestattet den Zugriff auf die vom Achsregler und der Linearisierung generierten Momente, die dann dem Beobachter zugeführt werden können. Die Momente werden dann per Bussystem zu den Umrichtern weitergeleitet. Als Messwerte stehen die Positionen und Geschwindigkeiten der beiden Antriebe zur Verfügung, so dass ein Beobachter nach der in Abschnitt 4.5 beschriebenen Methode möglich ist. Die Regelung des Roboters selbst erfolgt mit Hilfe der exakten Ein-/Ausgangslinearisierung. Auf Grund der Komplexität des direkten kinematischen Problems,

Tabelle 6.1: Kinematische und Kinetische Daten des Versuchsträgers FÜNFGELENK

Größe	Formelzeichen	Wert
Kurbellänge	$l_c =$	0,3 m
Stablänge	$l_s =$	0,5 m
Motorabstand	$l_d =$	0,3 m
Motorträgheit	$J_m =$	0,04 kg m <sup>2</sup>
Kurbelmasse	$m_c =$	0,42 kg
Stabmasse	$m_s =$	0,304 kg
Endeffektormasse	$m_e =$	0,114 kg

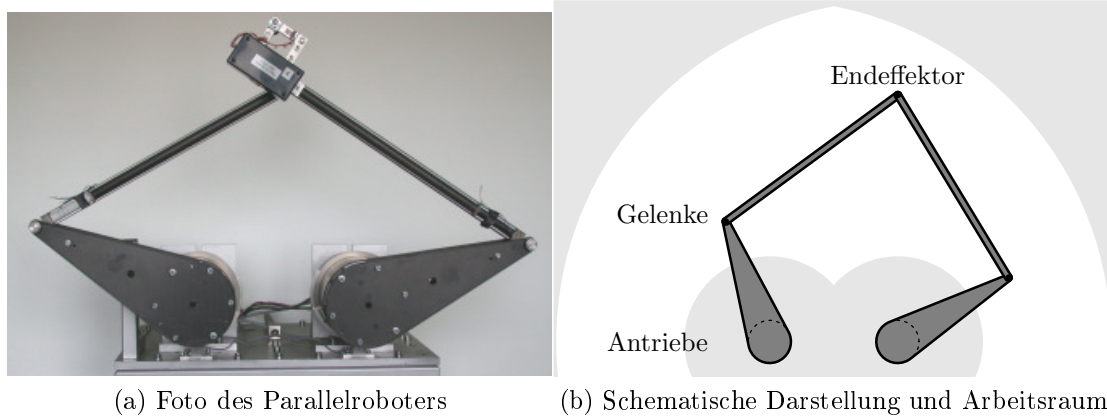


Abbildung 6.1: Versuchsträger FÜNFGELENK: Planarer Parallelroboter mit zwei Freiheitsgraden

ist diese Art der Regelung bei Parallelrobotern eher ungewöhnlich. Im vorliegenden Fall lässt sich das Problem jedoch analytisch lösen, so dass diese Form der Regelung möglich ist. Für die Funktionsweise des Beobachters hat dies keine Einschränkung, letztlich benötigt dieser die in den Achsen applizierten Momente. Der Entwurf basierte auf den verallgemeinerten Koordinaten. Diese stehen auch hier zur Verfügung. Als Referenzfahrten dienen im kartesischen geplante gradlinige Trajektorien. Ihre Planung erfolgt zeitoptimal für das ungestörte System.

## 6.2 Einsatz in der Simulation

Die Überprüfung der Algorithmen erfolgt zunächst in der Simulation. Dazu ist der Parallelroboter FÜNFGELENK samt Regelungsschema abgebildet. Auf den zur Verfügung stehenden Signalen kann dann der Beobachter entworfen und eingebracht werden. Die Simulation erlaubt auch die Realisierung des Beobachters als kontinuierliches System, in der Form in der der Entwurf stattgefunden hat. Der Signalfluss der Regelung in der Simulation ist in Abbildung 6.2 dargestellt. Die Linearisierung des Roboters mittels Vorsteuerung ist dabei einem kleinen Fehler unterworfen, um Eingriffe durch die Regler zu erzeugen. Da der Beobachter jedoch auf den kombinierten Momentenvektor zugreift,  $\tau_d$  in Abbildung 6.2, ist dies für die Funktion des Beobachters nicht relevant.

Die Parametrierung der PTD-PI Reglerkaskade erfolgte nach dem Entwurfsmuster aus [64] unter Minimierung der Regelfläche des linearisierten Systems. Der sich ergebende freie Parameter der Dämpfung in der Entwurfsgleichung ist dabei zu  $D = 1$  gesetzt. Die durch das mechanische System eingebrachte Zeitkonstante wird durch die Einträge der Hauptdiagonalen der Massenmatrix in der symmetrischen Position  $\mathbf{q}^T = [\frac{2\pi}{3} \text{ rad}, \frac{\pi}{3} \text{ rad}]$  abgeschätzt. Daraus



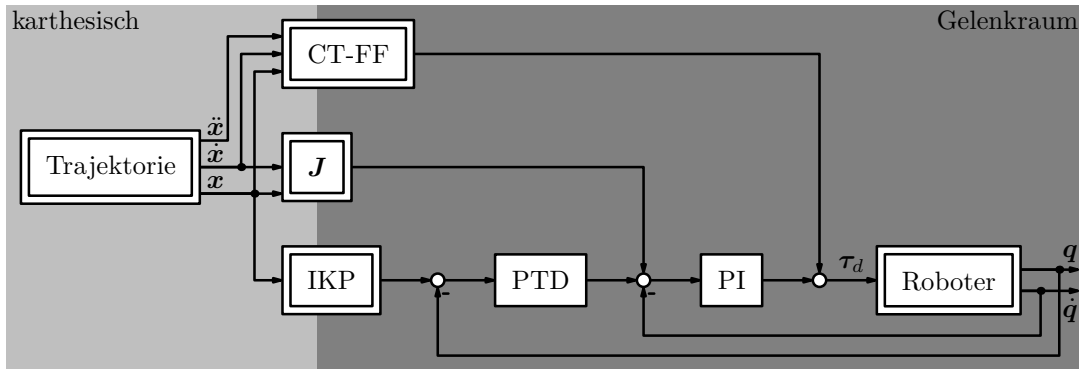


Abbildung 6.2: Signalfluss in der Simulation: Die Trajektorien sind im Kartesischen geplant, und werden in den Gelenkraum projiziert. Die Linearisierung erfolgt mittels Vorsteuerung auf Basis der Sollwerte (Computed Torque).

Tabelle 6.2: Reglerparameter in der Simulation. Die Symbole und Indizes korrespondieren zu der Beschreibung im Frequenzbereich aus Gleichung (5.43).

(a) PI-Regler		(b) PTD-Regler	
Parameter	Wert	Parameter	Wert
$V_i$	55,8375	$V_p$	83,33
$T_i$	0,008 s	$T_z$	0,004 s
		$T_n$	0,008 s

ergibt sich ein Wert für die mechanische Zeitkonstante von  $T_m = 0,1489$  s. Für die elektrische Zeitkonstante wurde ein Wert von  $T_e = 10^{-3}$  s gewählt. Die sich daraus ergebenden Parameter der Reglerkaskade sind in Tabelle 6.2 aufgelistet. Auf Grund des symmetrischen Aufbaus des Versuchsträgers FÜNFGELENK sind die Regler beider Achsen gleich parametrisiert. Die Qualität der Regelung kann durch eine dynamische Anpassung der Verstärkungen durch die Massenmatrix verbessert werden, siehe [29]. Die einzelnen Achsregler sind dann auf ein normiertes System parametrisiert, die Anpassung an die aktuelle Pose geschieht dann durch die Multiplikation mit dem der Achse zugeordnetem Element der Hauptdiagonalen der Massenmatrix. Diese Modifikation ist insbesondere bei Parallelrobotern sinnvoll, da bei diesen die Elemente der Massenmatrix deutlich mit der aktuellen Pose variieren. In der hier durchgeführten Simulation steht jedoch der Zustandsschätzer im Vordergrund und nicht die Regelung. Daher ist auf dieses Detail der Regelung verzichtet worden. Es ist zur Beurteilung der Schätzergebnisse ohne Bedeutung, da nur das letztlich applizierte Moment in den Beobachter einfließt.

Durch das überlagerte Steuerungs- und Programmiersystem des Roboters, die Aufgaben werden durch einzelne „Skill primitives“ beschrieben, ist eine gerade Punkt zu Punkt Verbindung in kartesischen Koordinaten als Bahn gewählt. Mit dem Startpunkt bei  $[-0,075 \text{ m}; 0,35 \text{ m}]^T$

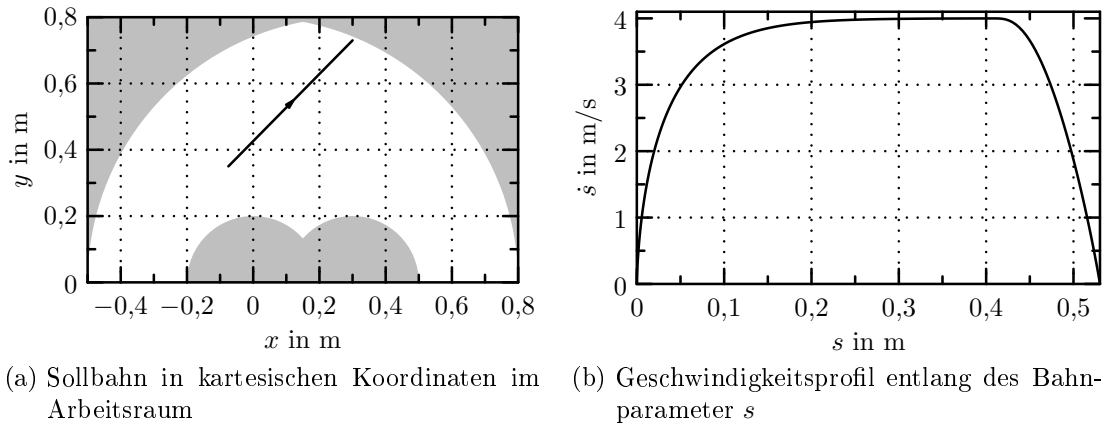


Abbildung 6.3: Trajektorie zur Verifikation des Zustandsschätzers

und dem Zielpunkt  $[0,3 \text{ m}; 0,725 \text{ m}]^T$  liegt sie mitten im Arbeitsraum des Roboters, Abbildung 6.3a. Bei den gewählten Randdaten hat die Bahn eine Durchlaufzeit von  $\Delta t = 0,233 \text{ s}$ . Das Geschwindigkeitsprofil entlang des Bahnparameters ist in Abbildung 6.3b dargestellt. Die in der Simulation verwendete Trajektorie ist nicht zeitoptimal, nutzt aber die maximale Bahngeschwindigkeit von  $v_{bahn} = 4 \text{ m/s}$  aus. Die Reibung tritt in den Gelenken zwischen Kurbeln und Stäben auf. Als Reibmodell dient die Coulombsche Reibung nach Gleichung (3.6). Die Haftreibung wird auf Grund der Tatsache, dass der Schätzer zu dieser Zeit inaktiv ist, nicht gesondert behandelt. Das Reibmoment wird während des Durchfahrens der Trajektorie in Abhängigkeit der Zeit variiert. Für die um die SI-Einheiten befreiten Funktionen gilt

$$|\sigma_{r,1}| = \begin{cases} 10 & : t \leq 0,1 \\ 20 - 100t & : 0,1 < t \leq 0,15, \\ 5 & : t > 0,15 \end{cases}, \quad |\sigma_{r,2}| = \begin{cases} 20 & : t \leq 0,1 \\ 5 + 150t & : 0,1 < t \leq 0,15, \\ 27,5 & : 0,1 < t \leq 5 \end{cases}$$

wobei das Reibmoment stets entgegen der jeweiligen Gelenkgeschwindigkeit wirkt. Die Beobachtbarkeit dieser Anordnung ist sichergestellt. In der beschriebenen Konfiguration sind die Winkelgeschwindigkeiten der betrachteten Gelenke linear unabhängig. Die Anzahl der mit Reibung behafteten Gelenke entspricht der Anzahl der Freiheitsgrade. Somit ist die Jakobimatrix i. Allg. invertierbar und der Entwurf des nichtlinearen Beobachters möglich.

**Beobachter mittels ENBNF** Zunächst wird die Detektion der Reibung mittels eines nichtlinearen Beobachters untersucht, der mit Hilfe der ENBNF entworfen ist. Der Entwurf folgt den in Abschnitt 4.5 abgeleiteten Gleichungen. Um linear unabhängige Eigenvektoren zu erhalten, werden die Eigenwerte der linearen Beobachtermatrix paarweise verschieden gewählt. Das System besitzt mit den durch die Reibung eingebrachten Zuständen die Ordnung

$n = 6$ . Die Pole der linearen Fehlerdynamik sind  $\mathbf{p}^T = -[100; 101; 102; 103; 104; 105]$ . Nach Festlegung der Eigenvektoren ergibt sich die lineare Beobachtermatrix dann zu

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -100 & -1 & -100 & -1 & -100 & -1 \\ 0 & -101 & 0 & -101 & 0 & -101 \\ 0 & 0 & -102 & -1 & -102 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -103 & 0 & -103 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -104 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -105 \end{bmatrix}. \quad (6.1)$$

Als Startwerte bei der Initialisierung des Beobachters werden die Reibwerte zu Null angenommen, Position und Geschwindigkeit aus den aktuellen Istwerten abgeleitet. Die Ergebnisse sind in den verallgemeinerten Koordinaten aufgetragen, in der auch Regelung und nicht-linearer Beobachter implementiert sind, siehe Abbildung 6.4. Durch die Initialisierung mit „falschen“ Anfangswerten bei der Reibung, kommt es zunächst zu einer Abweichung, auch in den messbaren Zuständen von Position und Geschwindigkeit. Nach dem Abklingen der durch die Initialwerte verursachten Eigenbewegung folgt der Beobachter den realen Werten. Während der Variation der Reibung im Zeitintervall  $[0,1; 0,15]$  kommt es zu einem kleinen Fehler in den Schätzwerten, da die Zustände des Beobachters den realen Werten leicht nachlaufen. Im anschließenden Intervall, bei dem die Reibung wieder konstant ist, konvergieren die geschätzten Größen rasch gegen die realen Werte. Auffällig bei den gewählten Parametern ist das deutliche Überschwingen der Schätzwerte. Der Prozess lässt sich über die Vorgabe der linearen Beobachtermatrix  $\mathbf{A}$  variieren und die Konvergenzgeschwindigkeit durch die Wahl schnellerer Pole erhöhen. Die Detektion der Reibmomente in den passiven Gelenken hat sich daher in der Simulation bestätigt.

In einer weiteren Simulation kommt nun die Aufschaltung der Störgröße hinzu. Dazu wird der Vorsteuerung, zur Kompensation der Nichtlinearitäten des Parallelroboters, zusätzlich das detektierte Reibmoment überlagert, um die Linearisierung zu verbessern und somit den Reglereingriff zu minimieren. Dazu wird die gleiche Trajektorie wie im vorigen Fall abgefahren, die Reibung jedoch konstant gelassen. Die Stabilität des Systems ist durch die Überlegungen aus Abschnitt 5.1 sichergestellt. Zur quantitativen Beurteilung der Güte in beiden Fällen, mit und ohne Kompensation der Reibmomente, werden dazu zwei Kriterien herangezogen: Der Schleppfehler und die Verzerrung der Trajektorie. Der Schleppfehler beschreibt den Fehler der Bahn bezogen auf den zeitlichen Durchlauf der Bahn, also den Abstand des Istwertes von der aktuellen Vorgabe durch die Trajektorie. Seine Definition ist sowohl im kartesischen Raum als auch im Gelenkraum sinnvoll. Im Gelenkraum ist eine separate Behandlung der Regler vorzuziehen, da die Interpretation des Abstandes im Vektoriellen

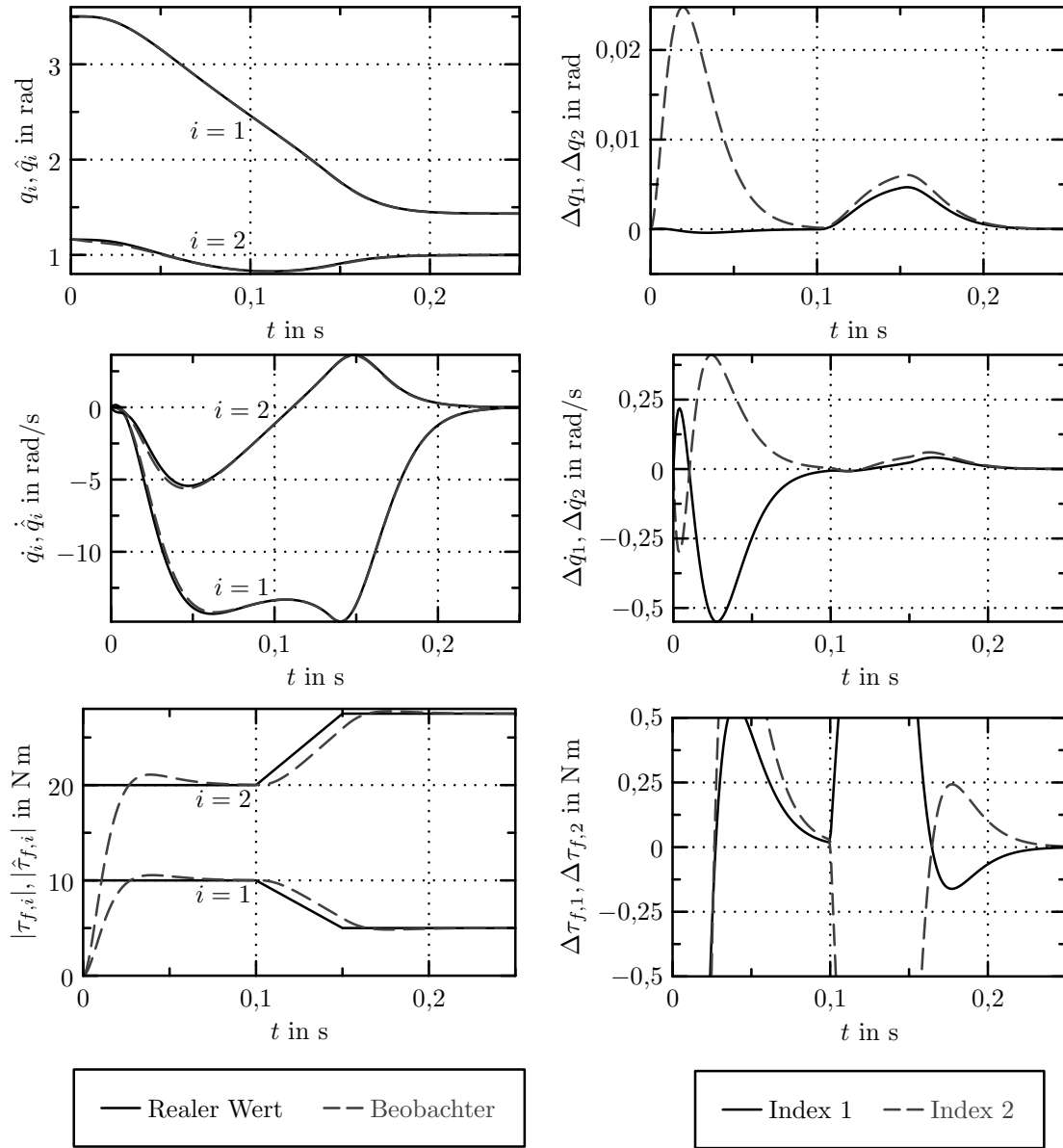


Abbildung 6.4: Simulationsergebnisse mit ENBNF Beobachter. Die linke Spalte zeigt geschätzte und reale Zustandsgrößen im direkten Vergleich. In der rechten Spalte ist die Differenz aufgetragen.

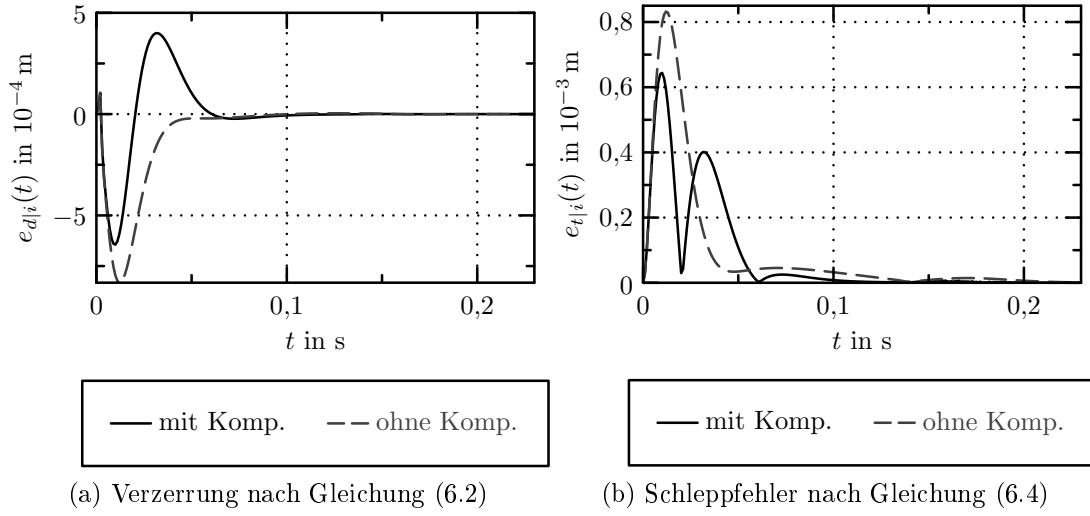


Abbildung 6.5: Ergebnisse der Gütekriterien bei Regelung mit Kompensation der Reibmomente beim FÜNFGELENK.

schwierig ist

$$e_t(t) := \|\mathbf{x}_i(t) - \mathbf{x}_{traj}(t)\|_2 \quad (6.2)$$

$$\mathbf{e}_{t,q}(t) := \begin{bmatrix} |q_1(t) - q_{traj,1}(t)| & \dots & |q_{n_{dof}}(t) - q_{traj,n_{dof}}(t)| \end{bmatrix}^T, \quad (6.3)$$

wobei  $\mathbf{x}_i(t)$  und  $\mathbf{x}_{traj}(t)$  die Ist- bzw. Sollwerte der kartesischen Bahn darstellen.

Die Verzerrung der Bahn stützt sich ausschließlich auf den räumlichen Teil der Bahn. Die Verzerrung ist hier als der minimale Abstand der aktuellen Position von der Referenzbahn definiert

$$e_d(t) := \text{dist}(\mathbf{x}_i(t), \mathcal{B}). \quad (6.4)$$

Dabei bezeichnet  $\mathcal{B}$  die Menge aller Punkte, die zur Solltrajektorie gehören. Obwohl die Funktion  $e_d(t)$  die Zeit als Parameter besitzt, wird der zeitliche Versatz von Soll- und Istbahn ausgeblendet. Einzig die kartesische Abweichung von der Bahn wird gewertet, Verzögerungen in der Bahn erhöhen den Fehler nicht. Damit ergibt sich die Möglichkeit die Bahntreue zu bewerten. Im Gegensatz zum Schleppfehler ist hier beim Übertrag vom Koordinatensystem, in dem die Aufgabe spezifiziert ist, in die Gelenkkordinaten des Roboters kein Informationsgewinn zu erwarten.

Die Ergebnisse der Simulation sind in Abbildung 6.5 aufgetragen. Mit Ausnahme der durch das Überschwingen der Schätzwerte verursachten Zunahme der Abweichung im Intervall  $[0,03\text{s}; 0,06\text{s}]$ , liegt der Fehler der kompensierten Bahn unter dem der nicht vorgesteuerten Simulation. Dies lässt sich auch in den Betragsintegralen der jeweiligen Funktionen

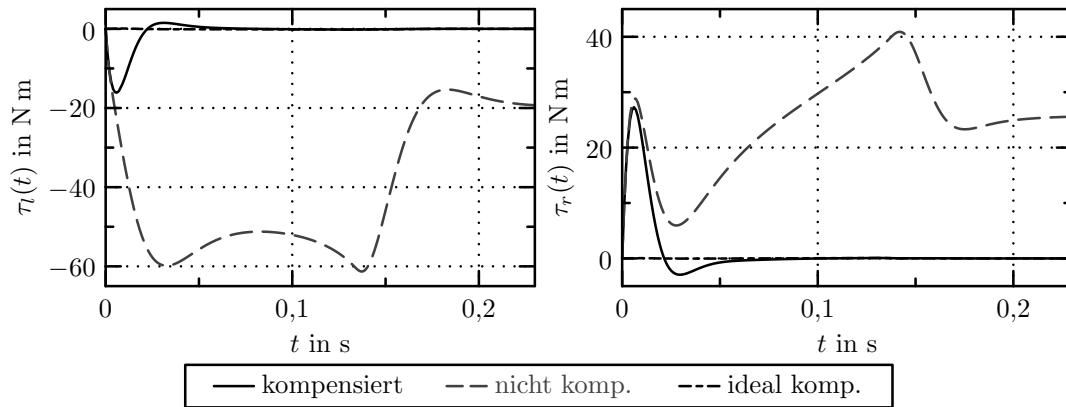


Abbildung 6.6: Ausgangsgrößen der Achsregler im Betrieb mit unterschiedlicher Kompensation der Reibmomente.

festmachen

$$E_d(t) := \int_{t_a}^{t_e} |e_d(t)| dt \quad E_t(t) := \int_{t_a}^{t_e} |e_t(t)| dt. \quad (6.5)$$

Damit ergeben sich für die auf den nicht kompensierten Fall bezogenen integralen und maximalen Fehler die Resultate in Tabelle 6.3. Neben der Kompensation mittels der Schätzwerte ist auch die Kompensation mit der bekannten Reibung aufgeführt. Der verbleibende Fehler in diesem Fall entsteht durch die Nutzung der Trajektoriendaten, die durch Interpolation an den Zwischenstellen Fehler aufweisen können. Die Ergebnisse im vorliegenden Fall weisen eine Reduzierung der Verzerrung auf. Deutlicher ist der Effekt der Kompensation im Schleppfehler erkennbar. Zudem zeigen die Ergebnisse aus Abbildung 6.5, dass der Ausgleichsvorgang zu Beginn, insbesondere das Überspringen, einen starken Einfluss auf die gesamte Güte haben. Beim Ausblenden dieses Bereichs sind die erzielten Verbesserungen in beiden Kriterien größer. Dieser Effekt findet sich auch in den von den Achsreglern erzeugten Momenten wieder, siehe Abbildung 6.6. Die Ausgangsgröße der Regler strebt gegen denjenigen Anteil, der im Falle idealer Kompensation vorliegt. Die Regler gleichen nur Interpolationsfehler der

Tabelle 6.3: Integral des Schleppfehlers bzw. der Verzerrung nach Gleichung (6.5) bezogen auf den nicht kompensierten Fall. Weiterhin ist der maximale Fehler im betrachteten Zeitraum angegeben

	Verzerrung		Schleppfehler	
	$E_d(t)$	$\max(e_d(t))$	$E_t(t)$	$\max(e_t(t))$
nicht kompensiert	100 %	100 %	100 %	100 %
kompensiert	95,0 %	77,0 %	87,1 %	77,0 %
ideal kompensiert	0,3 %	0,1 %	0,1 %	0,1 %

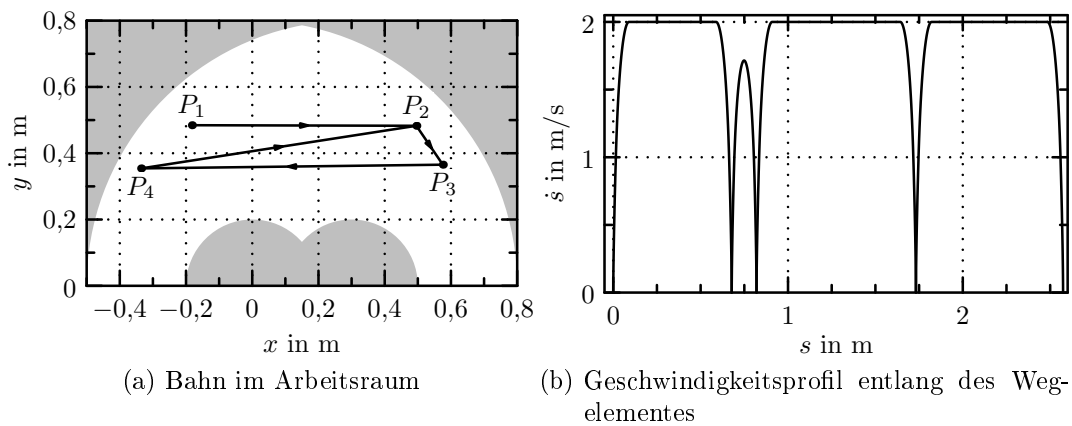


Abbildung 6.7: Bahn des Endeffektors im Arbeitsraum

Solltrajektorie aus. Diese Reduktion gilt auch für den Integralanteil, der damit in den Beobachter verschoben wird. Da im Beobachter die physikalische Zuordnung der Reibmomente bzgl. der Pose abgebildet ist, unterliegt dieser keinen Schwankungen im Arbeitsraum.

## 6.3 Einsatz am Roboter

Neben der Simulation ist der Zustandsschätzer auch am realen System angewendet worden. Die vorliegende Struktur wies jedoch hauptsächlich Reibung in den Motoren auf, da die passiven Gelenke nicht als adaptronische Gelenke ausgeführt und daher vergleichsweise reibungsfrei sind. Daher ist die Reibung in den Antrieben als Zustandsgröße in den Beobachter aufgenommen. In diesem Fall vereinfacht sich die Jakobimatrix zur Transformation der Reibgrößen. Die Massenmatrix jedoch bleibt in ihrer Komplexität erhalten, so dass sich an der grundsätzlichen Problemstellung keine Veränderung ergibt.

Die im Versuch verwendete Bahn ist in Abbildung 6.7 illustriert. Die Bahngeschwindigkeit ist hier auf  $\dot{s}_{\max} = 2 \text{ m s}^{-1}$  beschränkt, für Beschleunigung und Ruck gelten die Begrenzungen  $\ddot{s}_{\max} = 40 \text{ m s}^{-2}$  bzw.  $\dddot{s}_{\max} = 1000 \text{ m s}^{-3}$ . Im Gegensatz zur Simulation besteht die Bahn aus vier Segmenten, bei denen in dreien die maximale Bahngeschwindigkeit erreicht wird. Dieses bedeutet natürlich keine konstanten Geschwindigkeiten im Gelenkraum. Die Umschaltung zur nächsten Punkt zu Punkt Fahrt erfolgt, wenn der Zielpunkt mit hinreichender Genauigkeit erreicht ist.

Die Regelung des Systems ist mittels exakter Ein-/Ausgangslinearisierung in Verbindung mit einer Kaskadenregelung umgesetzt. Damit liegt, im Unterschied zur Regelung in der Simulation, ein zentrales Regelungskonzept vor, siehe [56]. Der Ausgang der linearen Regler wird ebenfalls transformiert. Damit ergibt sich der in Abbildung 6.8 dargestellte Signalfuss. Diese Art der Modelleinbindung ist für parallele Kinematiken nicht immer anwendbar, da das





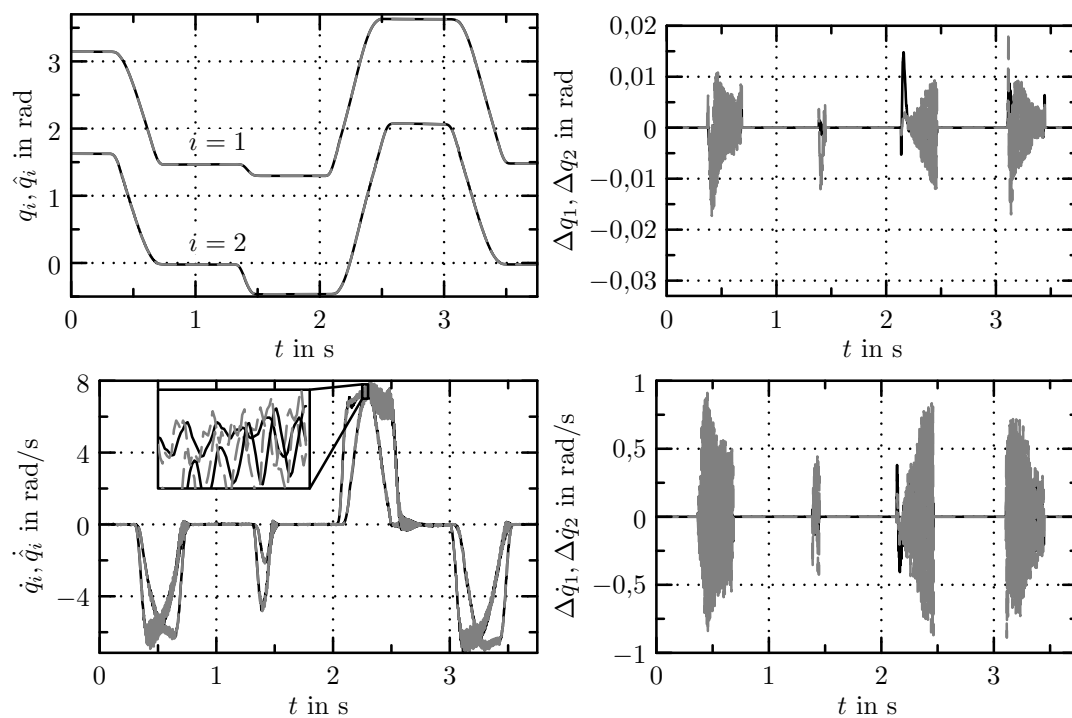


Abbildung 6.9: Vergleich der Zustandsgrößen des Beobachters mit den Messergebnissen am Versuchsträger FÜNFGELENK während der Testfahrt. In der linken Spalte sind die gemessenen Größen schwarz, die geschätzten Größen grau aufgetragen, in der rechten Spalte stellt der schwarze Verlauf die erste, der graue Verlauf die zweite Achse dar.

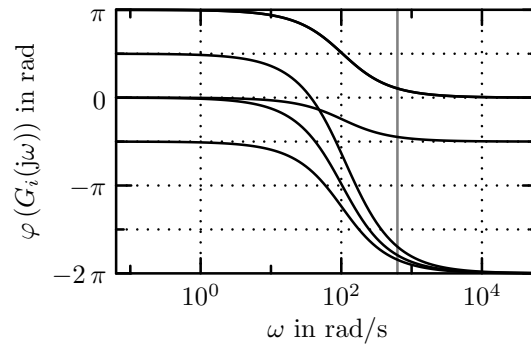


Abbildung 6.10: Phasenverschiebung zwischen Eingangssignal und Zustandsgröße beim Eingangsvektor  $\mathbf{b}^T = [0, 0, 0, 0, 0, 1]$ .

stützt sich daher auf den durch die Regelung vorgegebenen Sollwert ab. Da das von der Regelung bestimmte Moment nicht augenblicklich an der mechanischen Struktur anliegt, wird dem Beobachtereingang eine entsprechend dimensionierte Verzögerung vorgeschaltet und damit der zeitliche Zusammenhang zwischen Eingang und Ausgang des Systems aufrecht erhalten.

Der vergrößerte Abschnitt des Geschwindigkeitssignals zeigt, dass dieses harmonische Komponenten besitzt. Die Frequenz ist geschwindigkeitsunabhängig und liegt bei  $f_{v,s} \approx 100 \text{ Hz}$  und damit auch in der Größenordnung der Pole der Fehlerdynamik, die derjenigen aus der Simulation entspricht. Bei der Dynamik nach Gleichung (6.1) ergibt sich zwischen Zustandsgröße und Eingang, bei einer Frequenz von  $f = 100 \text{ Hz}$ , eine deutliche Phasenverschiebung. In Abbildung 6.10 sind die Phasenverläufe eines auf die letzte Zustandsgröße wirkenden Eingangssignals dargestellt. Da dem Systemeingang keine lineare Matrix zugeordnet werden kann, ist eine Beurteilung der zu erwartenden Dämpfung des Signals an dieser Stelle nicht durchgeführt. Die durch das System verursachte Phasenverschiebung zwischen Istzuständen und denen des Beobachters, erzeugt daher eine Schwingung des Differenzsignals. Dies zeigt ebenfalls der vergrößerte Ausschnitt in Abbildung 6.9. Diese Schwingung findet sich, mehr oder weniger ausgeprägt, auch in den anderen Zuständen des Beobachters wieder, so dass das Differenzsignal um die Nulllinie pendelt. Im Intervall  $t \in [2 \text{ s}; 2,5 \text{ s}]$  klingt das Differenzsignal zunächst auf, bleibt dann aber innerhalb einer Schranke. Es klingt an dieser Stelle ebenfalls die Schwingung im vom Beobachter nicht beeinflussten Geschwindigkeitssignal auf.

Die Ergebnisse der eigentlich interessierenden Größe zeigt Abbildung 6.11. An den Ergebnissen lässt sich festmachen, dass die Schätzung in den Phasen hoher Verzögerung nicht den Erwartungen entspricht. Das geschätzte Reibmoment ändert in diesem Bereich stark seinen Wert. Das Reibmoment des zweiten Motors wird sogar positiv und würde somit entlang der Bewegung wirken. Dieser Effekt kann Störfaktoren geschuldet sein, z. B. Modellierungsfeh-

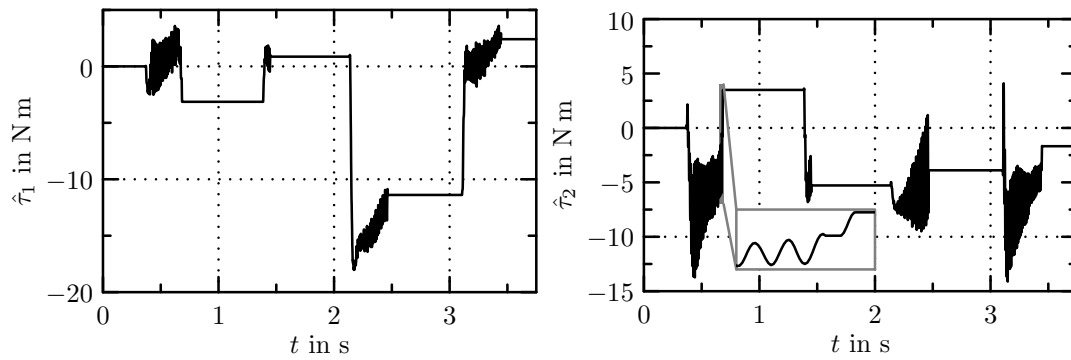


Abbildung 6.11: Schätzung der Reibung in den Motoren

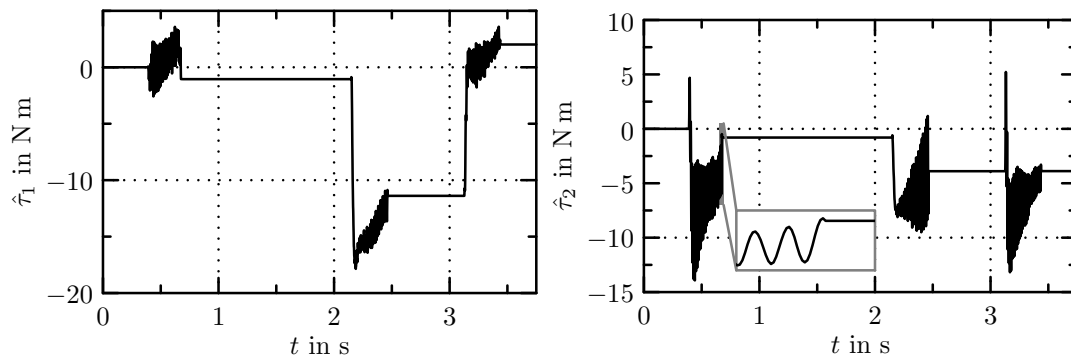


Abbildung 6.12: Schätzung der Reibung in den Motoren mit Hysterese zur Aufnahme der Schätzung

lern, so dass das Reibmoment nicht die einzige Größe ist, die in dem Zustand des Beobachters geschätzt wird. Die zeitliche Streckung des Signals in Abbildung 6.11 zeigt, dass die Veränderung des Schätzwertes, insbesondere nach einer Pausenzeit des Schätzers erfolgt. Dies ist der oben erwähnten Schwingung des Geschwindigkeitssignals geschuldet, welches um den Schwellwert des Schätzers pendelt. Die Unterdrückung dieses Effektes lässt sich relativ leicht mit Hilfe einer Hysterese erzielen, die das kurzfristige, erneute Einschalten des Beobachters unterdrückt. Damit ergeben sich die Verläufe in Abbildung 6.12.

Diese Maßnahme verhindert den Effekt des kurzfristigen Einschaltens und somit den Abfall der Messwerte. Die vom Beobachter geschätzten Werte, für die in den Gelenken auftretende Reibung, sind stabil und liegen sowohl vom Betrag als auch vom Vorzeichen im erwarteten Bereich. Dies bestätigt sich auch darin, dass die Zustände stets auch den selben Wert annehmen, unabhängig von der Position im Arbeitsraum. Auch das Vorzeichen der Reibmomente ist stets der Bewegung entgegengerichtet. Bei der Reibung im linken Antrieb ( $i = 1$ ) lässt sich zudem eine starke Richtungsabhängigkeit der Reibung feststellen: Bei mathematisch negativem Drehsinn ist die Reibung erheblich geringer als im anderen Fall. Hier liegt die geschätzte Reibung um  $\tau_1 \approx 0 \text{ N m}$ . Die Schwankungen in den positiven Bereich, der eine Unterstützung der Bewegung bedeuten würde, kann bei diesen kleinen Amplituden auch et-

waigen Modellfehlern geschuldet sein. Der rechte Antrieb hingegen weist keine ausgeprägte Richtungsabhängigkeit auf.

## 7 Zusammenfassung

Die vorliegende Arbeit beschreibt die Möglichkeit, die auftretende Reibung in den Gelenken von mechatronischen Systemen zu detektieren und die Ergebnisse in die Regelung dieser Strukturen zu integrieren. Im Fokus stehen dabei parallele Kinematiken, die sich durch passive Gelenke in der Struktur auszeichnen. Initiiert wurde die Arbeit insbesondere durch die Entwicklung der adaptronischen Gelenke, die durch veränderbares Gelenkspiel indirekt die Reibung in den Gelenken beeinflussen und somit innerhalb kurzer Zeitspannen Veränderungen der Reibwerte bewirken. Ihr Einsatz erfolgt vornehmlich in den passiven Gelenken der Struktur. Daher sind adaptronische Gelenke typischerweise in parallelen Kinematiken eingesetzt.

Die Detektion der Reibung in den Gelenken erfolgt mittels nichtlinearer Beobachter, die den Vorzug gegenüber adaptiven Verfahren erhalten haben. Diese Entscheidung begründet sich insbesondere auf der Voraussetzung, mit Hilfe der detektierten Reibung auch die Ansteuerung der Gelenke zu ermöglichen. Die Systemgleichungen sind auf allgemeine Beobachtbarkeit geprüft und die Mannigfaltigkeit bestimmt, in der die Bedingungen für das System erfüllt sind. Auf dieser Basis findet der Entwurf der Beobachter statt.

Da die Reibung als zu schätzende Störgröße im Vorhinein unbekannt ist und allenfalls obere und untere Schranken existieren, muss der nichtlineare Beobachter einen entsprechend hohen Konvergenzradius besitzen. Aus diesem Grund stehen Verfahren die die Strecke zum Entwurf linearisieren nicht zur Verfügung. Die Bestimmung des Beobachters erfolgt daher durch transformationsbasierte Entwurfstechniken, deren Konvergenzradius den zulässigen Anteil des Zustandsraums umfasst. Die beschreibenden Zustandsgrößen in den dynamischen Gleichungen des Roboters sind daher in Räume abgebildet die einen Beobachterentwurf begünstigen. Im Falle der Coulombschen Reibung erzielen die in dieser Arbeit vorgestellten Konzepte eine lineare Beobachterdynamik, so dass ein exponentielles Einschwingen auf den Wert erfolgt. Die dabei angegebene Transformation ist allgemein gültig und somit sind die erzielten Verfahren auf alle Systeme, deren dynamische Gleichungen diese Struktur aufweisen, anwendbar. Die konkrete Ausbildung der Parameter ist beim vorgestellten Ansatz unerheblich. Die lineare Dynamik zeichnet das gewählte Verfahren daher auch gegenüber den ebenfalls untersuchten Beobachtern mit hohen Verstärkungen aus. Diese stellen geringere Ansprüche an die Systemstruktur und besitzen ebenfalls einen großen Konvergenzradius,

erreichen jedoch keine lineare Fehlerdynamik. Die Untersuchung der Gleichungen zeigt außerdem, dass ein allgemeiner Normalformentwurf nach [15] unmöglich ist, sobald das System mehr als einen Freiheitsgrad besitzt.

Eine umfassende Analyse des gesamten Regelkreises zeigt die Varianten auf, die gewonnene Information weiter zu verarbeiten. Die Einbindung der Reibinformationen in die Generierung der Trajektorie ist dabei genauso untersucht, wie die Nutzung der Informationen im Linearisierungsschema der Roboterregelung. In beiden Fällen ist aus regelungstechnischer Sicht die Stabilität des Gesamtsystems entscheidend. Bei der Generierung der Trajektorien ist der Nachweis der Stabilität trivial. Die hier durchgeführte Analyse zeigt, dass die zeitoptimale Trajektorie schaltende Funktionen benötigt. Da im zweiten Fall der Regelkreis über den Beobachter geschlossen wird, ist die Stabilität des Systems explizit zu untersuchen. Sie ist mittels Lyapunovtheorie bewiesen und frei von vereinfachenden Annahmen und somit auf der gesamten Zustandsmannigfaltigkeit gültig. Gleiches gilt bei der Nutzung der Informationen zur Regelung der Gelenke. In diesem Fall ergeben sich ebenfalls vermaschte Regelkreise unter Einbeziehung der Beobachterinformationen. Auch hier ist die Stabilität des Gesamtsystems mittels Lyapunov bewiesen worden.

Die in dieser Arbeit gesammelten Erkenntnisse erlauben den Entwurf von nichtlinearen Beobachtern zur Detektion von Reibmomenten in den Gelenken von Robotern. Die erzielten Ergebnisse sind allgemein gültig und nicht von bestimmten strukturellen Voraussetzungen abhängig. Die Stabilität bei der Rückspeisung der Informationen in den Regelkreis, sowohl zur Starrkörperregelung als auch zur Ansteuerung etwaiger adaptronischer Gelenke ist sichergestellt und bewiesen. Dadurch lassen sich diese neuen Komponenten in Roboterstrukturen integrieren und nutzen ohne die Dynamik der Regelung negativ zu beeinflussen.

# A Matrixdifferentialrechnung

Zur Berechnung der diversen Ableitungen ist die Definition einer Differentialrechnung hilfreich, die Matrizen und Vektoren mit einbezieht, wie z.B. in [42]. Sie definiert die Operatoren, dass sich die aus dem Skalaren bekannten Regeln in die Rechnung mit Matrizen übertragen lassen und somit eine partitionierte Rechnung möglich ist. Die in [42] vorgeschlagenen Vorschriften besitzen die skalaren Ergebnisse als Spezialfall, sodass die Definitionen konsistent sind.

Eine der elementaren Operationen bei der Definition der Ableitungen von Matrizen nach Matrizen ist das Kroneckerprodukt.

**Definition 7 (Kroneckerprodukt)** Es seien die Matrizen  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times m}$  und  $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{l \times k}$  gegeben, dann ist das *Kronecker Produkt* definiert als

$$\mathbf{A} \otimes \mathbf{B} := \begin{bmatrix} a_{1,1}\mathbf{B} & \dots & a_{1,m}\mathbf{B} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1}\mathbf{B} & \dots & a_{n,m}\mathbf{B} \end{bmatrix} \quad \text{mit} \quad \mathbf{A} \otimes \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{nl \times mk}. \quad \square$$

Eine weitere wichtige Operation ist die Umsortierung einer Matrix in einen Vektor. Je nach angestrebten Zielvektor existieren dafür zwei Operatoren.

**Definition 8 (Stapeloperatoren)** Sei  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times m}$  eine Matrix mit

$$\mathbf{A} = [\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m] = [\mathbf{a}_1^*, \dots, \mathbf{a}_m^*]^T$$

dann sind folgende Funktionen definiert

$$\begin{array}{ll} \text{col} : \mathbb{R}^{n \times m} \rightarrow \mathbb{R}^{nm \times 1} & \text{row} : \mathbb{R}^{n \times m} \rightarrow \mathbb{R}^{1 \times nm} \\ \mathbf{A} \mapsto [\mathbf{a}_1^T, \dots, \mathbf{a}_m^T]^T & \mathbf{A} \mapsto [\mathbf{a}_1^{*T}, \dots, \mathbf{a}_n^{*T}] \end{array} \quad \square$$

Ein wichtiger Zusammenhang zwischen Kroneckerprodukt und Matrixmultiplikation zeigt Korollar 1, siehe [67] Proposition 7.1.6.

**Korollar 1 (Kroneckerprodukt und Matrizenmultiplikation)** Seien  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $\mathbf{B} \in$

$\mathbb{R}^{l \times k}$ ,  $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{m \times q}$  und  $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{k \times p}$  Matrizen, dann gilt

$$(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})(\mathbf{C} \otimes \mathbf{D}) = (\mathbf{AC}) \otimes (\mathbf{BD}). \quad \square$$

**Korollar 2 (Transposition Kroneckerprodukt, [67])** Seien  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times m}$  und  $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{l \times k}$ , Matrizen, dann gilt für die Transposition des Kroneckerproduktes

$$(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})^T = (\mathbf{A}^T \otimes \mathbf{B}^T) \quad \square$$

**Äquivalenzumformung 1** Seien  $\mathbf{z}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$  zwei Vektoren, dann gilt

$$(\mathbf{x} \otimes \mathbf{I}_n) \mathbf{z} = (\mathbf{I}_n \otimes \mathbf{z}) \mathbf{x} \quad \square$$

BEWEIS

$$(\mathbf{x} \otimes \mathbf{I}_n) \mathbf{z} = \begin{bmatrix} x_1 \mathbf{I}_n \\ \vdots \\ x_n \mathbf{I}_n \end{bmatrix} \mathbf{z} = \begin{bmatrix} x_1 \mathbf{I}_n \mathbf{z} \\ \vdots \\ x_n \mathbf{I}_n \mathbf{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{z} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ \mathbf{0} & & \ddots & \mathbf{0} \\ \vdots & & & \ddots \\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{z} \end{bmatrix} \mathbf{x} = (\mathbf{I}_n \otimes \mathbf{z}) \mathbf{x} \quad \blacksquare$$

**Definition 9 (Matrixableitung)** Die Ableitung einer Matrix  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times m}$  nach einer Matrix  $\mathbf{Z} \in \mathbb{R}^{x \times y}$  ist definiert zu

$$\frac{\partial \mathbf{A}(\mathbf{Z})}{\partial \mathbf{Z}} := \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial z_{1,1}} & \cdots & \frac{\partial}{\partial z_{1,y}} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial}{\partial z_{x,1}} & \cdots & \frac{\partial}{\partial z_{x,y}} \end{bmatrix} \otimes \mathbf{A}(\mathbf{Z}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{A}(\mathbf{Z})}{\partial z_{1,1}} & \cdots & \frac{\partial \mathbf{A}(\mathbf{Z})}{\partial z_{1,y}} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \mathbf{A}(\mathbf{Z})}{\partial z_{x,1}} & \cdots & \frac{\partial \mathbf{A}(\mathbf{Z})}{\partial z_{x,y}} \end{bmatrix}.$$

Die Resultatsmatrix  $\frac{\partial \mathbf{A}(\mathbf{Z})}{\partial \mathbf{Z}}$  hat die Dimension  $nx \times my$ .  $\square$

Aus der Definition der elementaren Ableitung nach (Definition 9) folgen Regeln für die Berechnung zusammengesetzter Ausdrücke, wie das Produkt.

**Korollar 3 (Produktregel)** Die Ableitung des Produkts zweier Matrizen  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{m \times l}$  nach einer Matrix  $\mathbf{Z} \in \mathbb{R}^{x \times y}$  berechnet sich gemäß

$$\frac{\partial \mathbf{A}(\mathbf{Z}) \mathbf{B}(\mathbf{Z})}{\partial \mathbf{Z}} = \frac{\partial \mathbf{A}(\mathbf{Z})}{\partial \mathbf{Z}} (\mathbf{I}_y \otimes \mathbf{B}) + (\mathbf{I}_x \otimes \mathbf{A}) \frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{Z})}{\partial \mathbf{Z}},$$

wobei obige Gleichung nur Matrizenmultiplikation definiert ist. D. h. Skalare sind nicht zulässig.  $\square$



Die Gültigkeit der Regel ergibt sich aus dem Nachrechnen. Die explizite Angabe der Abhängigkeiten ist dabei weggelassen.

BEWEIS Nach Definition 9 gilt

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \mathbf{A}\mathbf{B}}{\partial \mathbf{Z}} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{A}\mathbf{B}}{\partial z_{1,1}} & \cdots & \frac{\partial \mathbf{A}\mathbf{B}}{\partial z_{1,y}} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \mathbf{A}\mathbf{B}}{\partial z_{x,1}} & \cdots & \frac{\partial \mathbf{A}\mathbf{B}}{\partial z_{x,y}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial z_{1,1}} \mathbf{B} + \mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial z_{1,1}} & \cdots & \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial z_{1,y}} \mathbf{B} + \mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial z_{1,y}} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial z_{x,1}} \mathbf{B} + \mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial z_{x,1}} & \cdots & \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial z_{x,y}} \mathbf{B} + \mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial z_{x,y}} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial z_{1,1}} \mathbf{B} & \cdots & \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial z_{1,y}} \mathbf{B} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial z_{x,1}} \mathbf{B} & \cdots & \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial z_{x,y}} \mathbf{B} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial z_{1,1}} & \cdots & \mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial z_{1,y}} \\ \vdots & & \vdots \\ \mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial z_{x,1}} & \cdots & \mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial z_{x,y}} \end{bmatrix} \\
 &= \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial z_{1,1}} & \cdots & \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial z_{1,y}} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial z_{x,1}} & \cdots & \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial z_{x,y}} \end{bmatrix}}_{\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \mathbf{Z}}} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{0} \cdots \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{B} \end{bmatrix}}_{\mathbf{I}_y \otimes \mathbf{B}} + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \cdots \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{A} \end{bmatrix}}_{\mathbf{I}_x \otimes \mathbf{A}} \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial z_{1,1}} & \cdots & \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial z_{1,y}} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial z_{x,1}} & \cdots & \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial z_{x,y}} \end{bmatrix}}_{\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \mathbf{Z}}}
 \end{aligned}$$

Die letzte Zeile zeigt, dass die Umformungen für Skalare nicht gültig sind, da es zum Dimensionskonflikt bei der Multiplikation käme. ■

**Korollar 4 (Kettenregel)** Seien  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $\mathbf{Z} \in \mathbb{R}^{l \times k}$ ,  $\mathbf{B}$  Matrizen, dann ist

$$\frac{\partial \mathbf{A}(\mathbf{B}(\mathbf{Z}))}{\partial \mathbf{Z}} = \left( \mathbf{I}_l \otimes \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \text{row}(\mathbf{B})} \right) \left( \frac{\partial \text{col}(\mathbf{B}^T)}{\partial \mathbf{Z}} \otimes \mathbf{I}_m \right)$$

□

BEWEIS Die Kettenregel ergibt sich durch den Rückgriff auf Definition 9

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \mathbf{A}(\mathbf{B}(\mathbf{Z}))}{\partial \mathbf{Z}} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{A}(\mathbf{B}(\mathbf{Z}))}{\partial z_{1,1}} & \cdots & \frac{\partial \mathbf{A}(\mathbf{B}(\mathbf{Z}))}{\partial z_{1,k}} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \mathbf{A}(\mathbf{B}(\mathbf{Z}))}{\partial z_{l,1}} & \cdots & \frac{\partial \mathbf{A}(\mathbf{B}(\mathbf{Z}))}{\partial z_{l,k}} \end{bmatrix} \quad \text{mit} \quad \frac{\partial \mathbf{A}(\mathbf{B}(\mathbf{Z}))}{\partial z_{a,b}} = \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^k \frac{\partial \mathbf{A}(\mathbf{B}(\mathbf{Z}))}{\partial b_{i,j}} \frac{\partial b_{i,j}}{\partial z_{a,b}} = \frac{\partial \mathbf{A}(\mathbf{B}(\mathbf{Z}))}{\partial \text{row}(\mathbf{B}(\mathbf{Z}))} \left( \frac{\partial \text{row}(\mathbf{B}(\mathbf{Z}))^T}{\partial z_{a,b}} \otimes \mathbf{I}_m \right) \\
 &= \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{A}(\mathbf{B}(\mathbf{Z}))}{\partial \text{row}(\mathbf{B}(\mathbf{Z}))} \left( \frac{\partial \text{row}(\mathbf{B}(\mathbf{Z}))^T}{\partial z_{1,1}} \otimes \mathbf{I}_m \right) & \cdots & \frac{\partial \mathbf{A}(\mathbf{B}(\mathbf{Z}))}{\partial \text{row}(\mathbf{B}(\mathbf{Z}))} \left( \frac{\partial \text{row}(\mathbf{B}(\mathbf{Z}))^T}{\partial z_{1,k}} \otimes \mathbf{I}_m \right) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \mathbf{A}(\mathbf{B}(\mathbf{Z}))}{\partial \text{row}(\mathbf{B}(\mathbf{Z}))} \left( \frac{\partial \text{row}(\mathbf{B}(\mathbf{Z}))^T}{\partial z_{l,1}} \otimes \mathbf{I}_m \right) & \cdots & \frac{\partial \mathbf{A}(\mathbf{B}(\mathbf{Z}))}{\partial \text{row}(\mathbf{B}(\mathbf{Z}))} \left( \frac{\partial \text{row}(\mathbf{B}(\mathbf{Z}))^T}{\partial z_{l,k}} \otimes \mathbf{I}_m \right) \end{bmatrix} \\
 &= \left( \mathbf{I}_l \otimes \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \text{row}(\mathbf{B})} \right) \left( \frac{\partial \text{col}(\mathbf{B}^T)}{\partial \mathbf{Z}} \otimes \mathbf{I}_m \right)
 \end{aligned}$$

■

**Korollar 5 (Ableitung der Matrixinversen)** Die  $A(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  sei regulär und differenzierbar für alle  $t$  im Definitionsbereich, dann gilt

$$\frac{\partial A^{-1}}{\partial t} = -A^{-1} \frac{\partial A}{\partial t} A^{-1}.$$

Diese Beziehung lässt sich für den Matrixfall erweitern, mit  $Z \in \mathbb{R}^{x \times y}$

$$\frac{\partial A^{-1}}{\partial X} = - (I_x \otimes A^{-1}) \frac{\partial A}{\partial X} (I_y \otimes A^{-1}). \quad \square$$

BEWEIS Der Nachweis von Korollar 5 erfolgt durch Anwenden der Definition. ■

**Äquivalenzumformung 2** Seien  $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $z \in \mathbb{R}^{n \times 1}$  und  $x \in \mathbb{R}^{n \times 1}$  Matrizen bzw. Vektoren, dann gilt

$$\frac{\partial M}{\partial x^T} (z \otimes I_n) = (z^T \otimes I_n) \frac{\partial M}{\partial x}. \quad \square$$

BEWEIS

$$\begin{aligned} (z^T \otimes I_n) \frac{\partial M}{\partial x} &= \begin{bmatrix} z_1 I_n & \dots & z_n I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial M}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial M}{\partial x_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_i^n z_i \frac{\partial M}{\partial x_i} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\partial M}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial M}{\partial x_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 I_n \\ \vdots \\ z_n I_n \end{bmatrix} = \frac{\partial M}{\partial x^T} (z \otimes I_n) \quad \blacksquare \end{aligned}$$

**Äquivalenzumformung 3** Seien  $x \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ ,  $y \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ ,  $z \in \mathbb{R}^{n \times 1}$  und  $M(x) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  Matrizen bzw. Vektoren, dann gilt

$$(I_n \otimes z^T) \frac{\partial M}{\partial x} y = \frac{\partial \text{row } M}{\partial x} (I_n \otimes y) z. \quad \square$$

**Bemerkung 4** Für symmetrische Matrizen lassen sich die Vektoren  $y, z$  auf der rechten Seite in Äquivalenzumformung 3 vertauschen. □

BEWEIS

$$(I_n \otimes z) \frac{\partial M}{\partial x} y = \left[ \left\langle z^T \frac{\partial M}{\partial x_r} y \right\rangle_{r=1 \dots n} \right] = \frac{\partial \text{row } M}{\partial x} (I_n \otimes y) z \quad \blacksquare$$

**Äquivalenzumformung 4** Seien  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ ,  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ ,  $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$  und  $\mathbf{M}(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  Matrizen bzw. Vektoren, dann gilt

$$(\mathbf{z}^T \otimes \mathbf{I}_n) \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{y} = \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \mathbf{x}^T} (\mathbf{I}_n \otimes \mathbf{y}) \mathbf{z} = \underbrace{\left[ \frac{\partial m_1}{\partial \mathbf{x}^T}, \dots, \frac{\partial m_n}{\partial \mathbf{x}^T} \right]}_{\text{}} (\mathbf{I}_n \otimes \mathbf{z}) \mathbf{y}. \quad \square$$

BEWEIS Durch Nachrechnen ergibt sich die gemeinsame Summenform für jede Zeile  $r$  des Ergebnisvektors

$$r : \sum_i^n \sum_j^n \frac{\partial m_{r,i}}{\partial x_j} y_i z_j \quad \blacksquare$$



## B Eigenwerte

Im Folgenden sind einige Eigenschaften von Matrizen mit gleichen Eigenvektoren zusammengefasst. Für die vereinfachte Schreibweise sei folgender Operator eingeführt.

**Definition 1 (Eigenwertoperator)** Sei  $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine quadratische reguläre Matrix mit  $n$  paarweise verschiedenen Eigenwerten  $\lambda_i$ ,  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Ferner sei  $\mathbf{W} = [\mathbf{v}_{e,1}, \dots, \mathbf{v}_{e,n}]$  die aus den  $n$  Rechtseigenvektoren zusammengesetzte Matrix. Dann ist

$$\Lambda_{\mathbf{W}}(\mathbf{M}) = [\lambda_1, \dots, \lambda_n]^T$$

der Vektor der geordneten Eigenwerte der Matrix  $\mathbf{M}$  sortiert in der Reihenfolge der korrespondierenden Eigenvektoren in  $\mathbf{W}$ , also

$$\mathbf{M}\mathbf{v}_{e,i} = \lambda_i\mathbf{v}_{e,i} \Leftrightarrow \mathbf{M}\mathbf{w}_i = (\Lambda_{\mathbf{W}}(\mathbf{M}))_i\mathbf{w}_i. \quad \square$$

Mit Hilfe dieser Operation lässt sich die Summe zweier Matrizen mit gleichen Eigenvektoren klassifizieren.

**Korollar 6 (Matrizensumme)** Seien  $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  reguläre Matrizen mit jeweils paarweise verschiedenen Eigenwerten und gleichen Eigenvektoren  $\mathbf{v}_i$ . Ferner sei  $\mathbf{W} = [\mathbf{v}_{e,1}, \dots, \mathbf{v}_{e,n}]$  und

$$\Lambda_{\mathbf{W}}(\mathbf{A}) = [\lambda_1, \dots, \lambda_n]^T, \quad \Lambda_{\mathbf{W}}(\mathbf{B}) = [\mu_1, \dots, \mu_n]^T.$$

Dann besitzt die Summe der Matrizen die selben Eigenvektoren und es gilt

$$\Lambda_{\mathbf{W}}(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = [\lambda_1 + \mu_1, \dots, \lambda_n + \mu_n]^T \quad \square$$

BEWEIS Bei Multiplikation mit den Eigenvektoren der Summanden gilt

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B})\mathbf{v}_{e,i} = \mathbf{A}\mathbf{v}_{e,i} + \mathbf{B}\mathbf{v}_{e,i} = \lambda_i\mathbf{v}_{e,i} + \mu_i\mathbf{v}_{e,i} = (\lambda_i + \mu_i)\mathbf{v}_{e,i}, \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}.$$

Damit liegen  $n$  und damit alle Eigenvektoren der Summenmatrix fest. ■

**Bemerkung 5** Da die Einheitsmatrix alle Vektoren auf sich selbst abbildet, sind alle Vektoren Eigenvektoren zum Eigenwerte 1. Sie fügt sich daher in die dargestellten Rechenregeln ein.  $\square$

**Korollar 7 (Matrizenprodukt)** Seien  $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  reguläre Matrizen mit jeweils paarweise verschiedenen Eigenwerten und gleichen Eigenvektoren  $\mathbf{v}_i$ . Ferner sei  $\mathbf{W} = [\mathbf{v}_{e,1}, \dots, \mathbf{v}_{e,n}]$  und

$$\Lambda_{\mathbf{W}}(\mathbf{A}) = [\lambda_1, \dots, \lambda_n]^T, \quad \Lambda_{\mathbf{W}}(\mathbf{B}) = [\mu_1, \dots, \mu_n]^T.$$

Dann besitzt das Produkt der Matrizen die gleichen Eigenvektoren und es gilt

$$\Lambda_{\mathbf{W}}(\mathbf{AB}) = [\lambda_1 \mu_1, \dots, \lambda_n \mu_n]^T \quad \square$$

BEWEIS Bei Multiplikation mit den Eigenvektoren gilt

$$(\mathbf{AB}) \mathbf{v}_{e,i} = \mathbf{A}(\mathbf{B} \mathbf{v}_{e,i}) = \mathbf{A} \mu_i \mathbf{v}_{e,i} = (\lambda_i \mu_i) \mathbf{v}_{e,i}, \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}$$

Die gemeinsamen Eigenvektoren bleiben Eigenvektoren des Produktes.  $\blacksquare$

**Korollar 8 (Inverse Matrix)** Sei  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine reguläre Matrize mit  $n$  paarweise verschiedenen Eigenwerten und den zugehörigen Eigenvektoren  $\mathbf{W} = [\mathbf{v}_{e,1}, \dots, \mathbf{v}_{e,n}]$ . Es sei

$$\Lambda_{\mathbf{W}}(\mathbf{A}) = [\lambda_1, \dots, \lambda_n]^T$$

dann gilt für die Inverse der Matrix

$$\Lambda_{\mathbf{W}}(\mathbf{A}^{-1}) = [\lambda_1^{-1}, \dots, \lambda_n^{-1}]^T \quad \square$$

BEWEIS Es gilt

$$\mathbf{A} \mathbf{v}_{e,i} = \lambda_i \mathbf{v}_{e,i} \Leftrightarrow \mathbf{A}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{v}_{e,i} = \mathbf{A}^{-1} \lambda_i \mathbf{v}_{e,i} \Leftrightarrow \lambda_i^{-1} \mathbf{v}_{e,i} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{v}_{e,i}, \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}.$$

Die Eigenvektoren bleiben nach der Inversion erhalten.  $\blacksquare$

**Korollar 9 (Eigenwerte einer Blockdiagonalmatrix)** Seien  $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{D}$  reellwertige reguläre Matrizen mit passenden Dimensionen. Dann sind die Eigenwerte der Matrix

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D} \end{bmatrix}$$

gleich der Kombination der Eigenwerte der Teilmatrizen  $\mathbf{A}$  und  $\mathbf{D}$ . □

BEWEIS Es gilt für die Determinante der Blockmatrix nach [67] (Fact 2.13.7.)

$$\det \left( \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C}\mathbf{A} & \mathbf{D} \end{bmatrix} \right) = \det(\mathbf{A}) \cdot \det(\mathbf{D} - \mathbf{C}\mathbf{B}).$$

Damit ist

$$\det \left( \begin{bmatrix} \mathbf{I} \cdot s - \mathbf{A} & -\mathbf{B} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \cdot s - \mathbf{D} \end{bmatrix} \right) = \det(\mathbf{I} \cdot s - \mathbf{A}) \cdot \det(\mathbf{I} \cdot s - \mathbf{D}) \quad \blacksquare$$

## Singulärwerte

Die Singulärwerte einer Matrix erlauben die Beurteilung der maximalen Verstärkung die ein Vektor bei Multiplikation mit der Matrix erfahren kann (2-Norm).

**Definition 10 (Singulärwertzerlegung)** Die Zerlegung einer Matrix  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$  gemäß

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}_A \mathbf{\Sigma}_A \mathbf{V}_A^T, \quad \text{mit } \mathbf{U} \in \mathbb{R}^{m \times m}, \mathbf{V} \in \mathbb{R}^{n \times n} \text{ und } \mathbf{U}^T \mathbf{U} = \mathbf{I}, \mathbf{V}^T \mathbf{V} = \mathbf{I}$$

wobei die Matrix  $\mathbf{\Sigma}$  nur die Singulärwerte als Einträge auf der Hauptdiagonalen besitzt, heißt *Singulärwertzerlegung* der Matrix. □

**Korollar 10 (Abschätzung der Singulärwerte eines Produkts ([67]))** Seien die Matrizen  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  und  $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times m}$  gegeben, dann gilt

$$\sigma_{\min}(\mathbf{A}) \sigma_i(\mathbf{B}) \leq \sigma_i(\mathbf{AB}) \leq \sigma_{\max}(\mathbf{A}) \sigma_i(\mathbf{B}). \quad \square$$





## C Modellierung des Versuchsträgers

Die Modellierung des Versuchsträgers FÜNFGELENK ist hier im Anhang kurz skizziert. Zunächst werden die Kinematik und differentielle Kinematik abgeleitet. Auf diese Ergebnisse aufbauend folgt das dynamische Modell. Bei der Modellierung des planaren Parallelroboters werden diskrete konzentrierte Elemente für die Stäbe verwendet. Das Vorgehen folgt daher den z. B. in [43] beschriebenen Verfahren, welches das kinetische Verhalten der Roboterglieder durch verteilte Punktmassen abbildet.

### C.1 Kinematik des Roboters

Im Hinblick auf die Verwendung des Modells für den nichtlinearen Beobachter werden die passiven Winkel in die Modellierung mit einbezogen. Da die Beschreibung des Roboters basierend auf den Antriebskoordinaten erfolgt, bedeutet dies bei Parallelrobotern häufig, dass die Position nicht eindeutig definiert ist. Das gilt auch für das FÜNFGELENK. Um eine eindeutige Position zu erhalten, wird vorausgesetzt, dass keine Singularitäten des Systems durchfahren werden. Konkret bedeutet dies die Einschränkung der passiven Winkel nach Abbildung C.1 auf die Intervalle

$$\alpha_1 \in (0, \pi) \quad \alpha_2 \in (0, \pi) \quad \alpha_3 \in (0, \pi). \quad (\text{C.1})$$

Unter dieser Voraussetzung spannen die Glieder des FÜNFGELENK stets ein konvexes Fünfeck  $A, B, C, D, E$  auf, so dass das Dreieck  $\Delta_{CDE}$  eindeutig ist: Der Punkt  $D$  befindet sich stets links der Strecke  $\overline{EC}$ . Die Koordinaten der unteren vier Punkte des Fünfecks sind durch die Winkel sofort angebbbar

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} d \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} d + l_1 \cos(\phi_2) \\ l_1 \sin(\phi_2) \end{bmatrix} \quad \mathbf{e} = \begin{bmatrix} l_1 \cos(\phi_1) \\ l_1 \sin(\phi_1) \end{bmatrix}. \quad (\text{C.2})$$

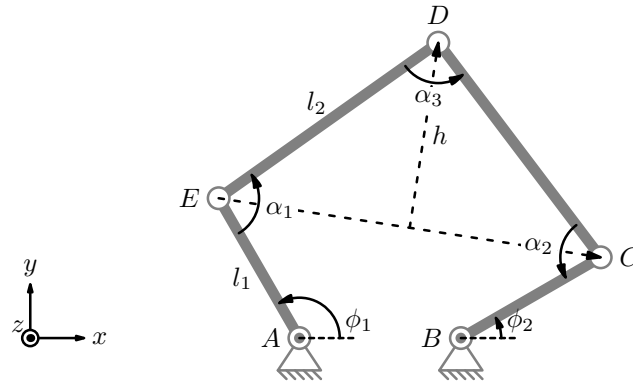


Abbildung C.1: Schematische Darstellung des Parallelroboters FÜNFGELENK mit Kennzeichnung der zur Modellierung verwendeten Größen. Der Ursprung des Koordinatensystems liegt im Punkt A.

Weiterhin gilt

$$\begin{aligned} \mathbf{c} - \mathbf{e} = \mathbf{v}_{ec} \quad \mathbf{R} : x \rightarrow \begin{bmatrix} \cos(x) & -\sin(x) \\ \sin(x) & \cos(x) \end{bmatrix} \quad h = \frac{1}{2} \sqrt{4l_2^2 - \|\mathbf{v}_{ec}\|_2^2} \\ \mathbf{d} = \mathbf{e} + \frac{1}{2} \mathbf{v}_{ec} + h \mathbf{R}\left(\frac{\pi}{2}\right) \frac{\mathbf{v}_{ec}}{\|\mathbf{v}_{ec}\|_2}. \end{aligned} \quad (\text{C.3})$$

Damit stehen sämtliche Vektoren zu den Punkten des Fünfecks fest. Aus ihnen lassen sich alle weiteren Größen bestimmen. Jeder Punkt, der Teil der Roboterstruktur ist, kann aus der Linearkombination der Vektoren  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}, \mathbf{e}$  dargestellt werden. Die passiven Winkel in den Punkten C und E folgen aus dem Kosinussatz

$$\alpha_1 = \arccos\left(\frac{l_1^2 + l_2^2 - \|\mathbf{d}\|_2^2}{2l_1l_2}\right) \quad \alpha_2 = \arccos\left(\frac{l_1^2 + l_2^2 - \|\mathbf{d} - \mathbf{b}\|_2^2}{2l_1l_2}\right). \quad (\text{C.4})$$

Die differentielle Kinematik eines Punktes folgt nun aus der Differentiation nach der Zeit. Diese kann unter zur Hilfenahme der Kettenregel durchgeführt werden, so dass sich die bekannte Beziehung zur Ermittlung der Jakobimatrix ergibt. Für einen beliebigen Punkt auf der Struktur gilt daher

$$\mathbf{x} = r_1 \cdot \mathbf{a} + r_2 \cdot \mathbf{b} + r_3 \cdot \mathbf{c} + r_4 \cdot \mathbf{d} + r_5 \cdot \mathbf{e} \quad r_i \in \mathbb{R} \quad (\text{C.5a})$$

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \left( r_1 \cdot \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \phi^T} + r_2 \cdot \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial \phi^T} + r_3 \cdot \frac{\partial \mathbf{c}}{\partial \phi^T} + r_4 \cdot \frac{\partial \mathbf{d}}{\partial \phi^T} + r_5 \cdot \frac{\partial \mathbf{e}}{\partial \phi^T} \right) \frac{d\phi}{dt}. \quad (\text{C.5b})$$

Speziell für den Endeffektor gilt dann mit  $r_{1,2,3,5} = 0, r_4 = 1$

$$\frac{d\mathbf{d}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{d}}{\partial \boldsymbol{\phi}^T} \cdot \frac{d\boldsymbol{\phi}}{dt}.$$

## C.2 Kinetik des Roboters

Die Differentialgleichungen des Systems werden, wie im einleitenden Abschnitt erwähnt, durch eine diskrete Modellierung der Roboterglieder gewonnen. Dazu werden die Glieder durch Punktmassen ersetzt. Ein Stab der Masse  $m$  wird mit der Verteilung der Punktmassen von  $\frac{1}{6}m$  an den Stabenden und  $\frac{2}{3}m$  in der Stabmitte beschrieben. In Kombination mit den Massen der passiven Gelenke ergeben sich beim vorliegenden Roboter dann  $n_p^* = 4 \cdot 3 + 3 = 15$  einzelnen Punktmassen an  $n_p = 7$  verschiedenen Positionen: Die Endpunkte der Stäbe und Gelenke fallen zusammen, die in die Antriebe verschobenen Punktmassen gehen nicht in die Berechnung ein. Zusammen mit den kinematischen Beziehungen aus Gleichung (C.5b) lässt sich die Lagrangefunktion aufstellen und die beschreibenden Differentialgleichungen aus dem bekannten Formalismus ableiten, siehe z. B. [68]

$$\begin{aligned} E_{kin} &= \sum_{i=1}^{n_p} E_{kin,i} = \sum_{i=1}^{n_p} \left( \frac{1}{2} m_i \dot{\mathbf{x}}_i^T \dot{\mathbf{x}}_i \right) & E_{pot} &= \sum_{i=1}^{n_p} E_{pot,i} = \sum_{i=1}^{n_p} (m_i \mathbf{g}^T \mathbf{x}_i) \\ L &= E_{kin} + E_{pot} \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{\phi}}^T} \right) - \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{\phi}^T} = \boldsymbol{\tau}. \end{aligned} \quad (C.6)$$

Die letzte Gleichung beinhaltet die Modellierung des Starrkörpersystems ohne Reibung. Die Antriebsmomente der beiden Motoren sind in dem Vektor  $\boldsymbol{\tau}$  zusammengefasst.



# Literaturverzeichnis

- [1] *Robotik und Automation Portrait der Branche 2010*. VDMA, Dezember 2009
- [2] BEITZ, W. (Hrsg.) ; GROTE, K.-H. (Hrsg.): *Dubbel Taschenbuch für den Maschinenbau*. 19. Springer Verlag, 1997
- [3] MERLET, J. P.: *Parallel Robots*. Kluver, 2001
- [4] TSAI, L.-W.: *Robot Analysis*. John Wiley and Sons, 1999
- [5] BUDDE, C.: *Wechsel der Konfiguration zur Arbeitsraumvergrößerung bei Parallelrobotern*, TU Braunschweig, Diss., 2009
- [6] KOCK, S.: *Parallelroboter mit Antriebsredundanz*, TU Braunschweig, Diss., 2001
- [7] ALGERMISSEN, S.: *Selbsteinstellende, robuste Regelung von Strukturschwingungen an Parallelrobotern*, TU Braunschweig, Diss., 2010
- [8] LUENBERGER, D. G.: Observing the State of a Linear System. In: *IEEE Transactions on Military Electronics* (1964), S. 74–80
- [9] LUENBERGER, D. G.: An Introduction to Observers. In: *IEEE Transactions on Automatic Control* 16 (1971), Dezember, Nr. 6, S. 596–602
- [10] KALMAN, R. E.: On the General Theory of Control Systems. In: *Proc. 1st Int. Congress on Automatic Control* Bd. 1, 1960, S. 481–492
- [11] FÖLLINGER, O.: *Regelungstechnik*. Hüthig, 1990
- [12] BRAMMER, K. ; SIFFLING, G.: *Kalman-Bucy-Filter*. Oldenbourg, 1975 (Methoden der Regelungstechnik)
- [13] BIRK, J.: *Rechnergestützte Analyse und Lösung nichtlinearer Beobachtungsaufgaben*. VDI Verlag, 1992 (8: Mess- Steuerungs- und Regelungstechnik 294)
- [14] HESSELBACH, J. ; BREITBACH, E. ; BUDDE, C. ; ROSE, M. ; MAASS, J.: Dynamic Performance Enhancement of a HEXA-Parallel-Robot Using the Computed Torque Approach. In: *Proc. of Mechatronics and Robotics* Bd. 3, 2004, S. 261–266

- 
- [15] ISIDORI, A.: *Nonlinear Control Systems*. Second. Springer Verlag, 1989 (Communication and Control Engineering Series)
  - [16] NIJMEIJER, H. ; SCHAFT, A. J. d.: *Nonlinear Dynamical Control Systems*. Springer Verlag, 1996
  - [17] BURDET, E. ; HONEGGER, M. ; CODOUREY, A. C.: Controllers with Desired Dynamic Compensation and their Implementation on a 6DOF Parallel Manipulator. In: *Proceedings of the 2000 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems* (2000), S. 39–44
  - [18] AGHANNAN, N. ; ROUCHON, P.: An Intrinsic Observer for a Class of Lagrangian Systems. In: *IEEE Trans. on Automatic Control* 48 (2003), Juni, Nr. 6, S. 936–945
  - [19] ABDESSEAMEUD, A. ; KHELFI, M. F.: A Variable Structure Observer for Robot manipulators Control. In: *Proc. of the 11th IEEE International Conference on Methods and Models in Automation and Robotics*, 2005, S. 609–614
  - [20] NEUMANN, R.: *Beobachtergestützte dezentrale entkoppelnde Regelung von Robotern mit elastischen Gelenken*. VDI Verlag, 1995 (8: Mess- Steuerungs- und Regelungstechnik 529)
  - [21] LIN, H.-N. ; KUROE, Y.: Decoupling control of robot manipulators by using variable-structure disturbance observer. In: *Proceedings of the 1995 IEEE IECON 21st International Conference on Industrial Electronics, Control, and Instrumentation*, 1995
  - [22] THÜMMEL, M.: *Modellbasierte Regelung mit nichtlinearen inversen Systemen und Beobachtern von Robotern mit elastischen Gelenken*, TU München, Diss., 2006
  - [23] LUCA, A. D. ; SCHRÖDER, D. ; THÜMMEL, M.: An Acceleration-based State Observer for Robot Manipulators with Elastic Joints. In: *IEEE International Conference on Robotics and Automation*, 2007, S. 3817–3823
  - [24] NICOSIA, S. ; TORNAMBE, A.: High-gain Observers in the State and parameter Estimation of Robots having Elastic Joints. In: *System and Control Letters* 13 (1989), S. 331–337
  - [25] CHLADNY, R. R. ; KOCH, C. R.: Flaness-Based Tracking of an Elktromechanical Variable Valve Timing Actuator with Disturbance Observer Feedforward Compensation. In: *IEEE Trans. on Control Systems Technology* 16 (2008), S. 652–663

- 
- [26] LUCA, A. D. ; ALBU-SCHÄFFER, A. ; S, Haddadin ; HIRZINGER, G.: Collision Detection and Safe Reaction with the DLR-III Lightweight Manipulator Arm. In: *Proc. of the 2006 IEEE International Conference on Intelligent Robots and Systems*, 2006, S. 1623–1630
- [27] MAASS, J.: *Ein Beitrag zur Steuerungstechnik für parallelkinematische Roboter in der Montage*, TU Braunschweig, Diss., 2009
- [28] FINKEMEYER, B.: *Robotersteuerungsarchitektur auf der Basis von Aktionsprimitiven*, TU Braunschweig, Diss., 2004
- [29] REISINGER, T.: *Kontaktregelung von Parallelrobotern auf der Basis von Aktionsprimitiven*, TU Braunschweig, Diss., 2008
- [30] DADJI, Y. ; MICHALIK, H. ; MÖGLICH, T.: Parallel Architecture for Real Time Control System Based on the IEEE1394 Standard. In: *Proceedings of the 2009 International Conference on Parallel and Distributed Processing Techniques and Applications (PDP-TA)*, 2009, S. 24–29
- [31] KOLBUS, M. ; WOBBE, F. ; STACHERA, C. ; SCHUMACHER, W. ; ALGERMISSEN, S. ; SINAPIUS, M.: Sliding Mode Control of a Parallel Robot with Robust Vibration Control. In: *The 9th International Conference on Motion and Vibration Control (MoViC 2008)*, 2008
- [32] WHITCOMB, L. L. ; RIZZI, A. A. ; KADITSCHKE, D. E.: Comparative Experiments with a New Adaptive Controller for Robot Arms. In: *IEEE Trans on Robotics and Automation* 9 (1993), Februar, Nr. 1, S. 59–70
- [33] SCHÜTZ, D. (Hrsg.) ; WAHL, F. M. (Hrsg.): *Robotic Systems for Handling and Assembly*. Springer Verlag, 2010 (STAR). – Integrated Force and Motion Control of Parallel Robots – Part 1: Unconstrained Space
- [34] PAVLOVIC, N. ; KEIMER, R. ; FRANKE, H.-J.: Development of Adaptronic Revolute Joints for Parallel Robots. In: *1st Symposium on Multidisciplinary Studies of Design in Mechanical Engineering*, 2008
- [35] PAVLOVIC, N. ; KEIMER, R. ; FRANKE, H.-J.: Improvement of the Overall Performance of Parallel Roboters Using Joints with Integrated Piezo Actuators. In: *Proc. of the 11th International Conference on New Actuators, ACTUATOR 2008*, 2008
- [36] OLSSON, H. ; ASTRÖM, K.J. ; WIT, C. C. ; GRÄVERT, M. ; LISCHINSKY, P.: Friction Models and Friction Compensation. (1997)

- 
- [37] DAHL, P. R.: A solid Friction Model / The Aerospace Cooperation. 1968. – Forschungsbericht
  - [38] WITT, C. C. ; OLSSON, H. ; ASTRÖM, K. J. ; LISCHINSKY, P.: A New Model for Control of Systems with Friction. In: *IEEE Trans. on Automatic Control* 3 (1995), März, Nr. 3, S. 419–425
  - [39] LAMPAERT, V. ; SWEVER, J. ; AL-BENDER, F.: Modification of the Leuven Integrated Friction Model Structure. In: *IEEE Trans. on Automatic Control* 47 (2002), April, Nr. 4, S. 683–687
  - [40] ARMSTRONG-HELOUVRY, B. ; DUPONT, P. ; WIT, C. C.: A Survey of Models, Analysis Tools and Compensation Methods of the Control of Machines with Friction. In: *automatica* 7 (1994), S. 1083–1138
  - [41] GAUL, L. ; NITSCHKE, R.: The Role of Friction in Mechanical Joints. In: *Applied Mechanic Reviews* 54 (2001), März, Nr. 2, S. 93–106
  - [42] BOHN, C.: *Rekursive Parameter Estimation for Nonlinear Continuous-Time Systems through Sensitivity-Model-Based Adaptive Filters*, Ruhr Universität Bochum, Diss., 2000
  - [43] WOBBE, F. ; KOLBUS, M. ; SCHUMACHER, W.: Continuous Sliding Surfaces versus Classical Control Concepts on Parallel Robots. In: *Proc. of the 13th IEEE IFAC International Conference on Methods and Models in Automation*, 2007
  - [44] KELLER, H.: *Entwurf nichtlinearer Beobachter mittels Normalformen*, Universität Karlsruhe, Diss., 1986
  - [45] KHALIL, H. K.: *Nonlinear Systems*. Prentice Hall, 2002
  - [46] KRENER, A. J. ; ISIDORI, A.: Linearization by Output Injection and nonlinear Observers. In: *System and Control Letters* 3 (1983), June, Nr. 1, S. 47–52
  - [47] KAZANTZIS, N. ; KRAVARIS, C.: Nonlinear Observer Design Using Lyapunov's Auxiliary Theorem. In: *Proceedings of the 36th Conference on Decision and Control*, 1997
  - [48] KRENER, A. J. ; MINGQING, X.: Nonlinear Observer Design in the Siegel Domain. In: *SIAM Journal of Optimal Control* 41 (2002), S. 932–953
  - [49] COURANT, R. ; HILBERT, D.: *Methoden der mathematischen Physik II*. Heidelberger Taschenbücher, 1968
  - [50] RAISCH, J.: *Mehrgrößenregelung im Frequenzbereich*. Oldenbourg, 1994



- 
- [51] SCHUMACHER, W.: *Grundlagen der Regelungstechnik*. Skript, Oktober 2008. – Umdruck zur Vorlesung
- [52] DIETHELM, K.: *Mathematik für Ingenieure*. Internet, 1999. – Vorlesungsskript
- [53] MAASS, J.: *Ein Beitrag zur Steuerungstechnik für parallelkinematische Roboter in der Montage*, TU Braunschweig, Diss., 2009
- [54] MAASS, J. ; KOLBUS, M. ; BIER, C. ; WOBBE, F. ; SCHUMACHER, W. ; RAATZ, A. ; HESSELBACH, J.: Advances in Motion Control for High-Performance Parallel Robots. In: *Robotic Systems for Handling and Assembly*, 2008
- [55] PAPAGEORGIOU, M.: *Optimierung Statische, dynamische, stochastische Verfahren für die Anwendung*. Oldenbourg, 1991
- [56] SCIAVICCO, L. ; SICILIANO, B.: *Modelling and Control of Robot Manipulators*. Springer, 2001 (Advanced Textbooks in Control and Signal Processing)
- [57] ALGERMISSEN, S. ; ROSE, M. ; SINAPIUS, M. ; STACHERA, K.: Robust Gain-Scheduling Control for Parallel Robots with Smart-Structure Components. In: SCHÜTZ, D. (Hrsg.) ; RAATZ, A. (Hrsg.) ; WAHL, F. M. (Hrsg.): *Proceedings of the 3rd International Colloquium of the Collaborative Research Center SFB 562*, 2008, S. 191–206
- [58] ASADA, H. ; SLOTINE, J.-J. E.: *Robot Analysis and Control*. John Wiley and Sons, 1985
- [59] FÖLLINGER, O.: *Nichtlineare Regelungen II*,. 7. Oldenbourg, 1993 (Methoden der Regelungs- und Automatisierungstechnik)
- [60] WILLEMS, J. C.: Dissipative Dynamical Systems, Part I: General Theory. In: *Archive for Rational Mechanics and Analysis* 45 (1972), S. 321–351
- [61] WEN, J. T. ; MURPHY, S. H.: PID Control for Robot Manipulators / Center for Intelligent Robotic Systems for Space Exploration, Department of Electrical, Computer and Systems Engineering, Rensselaer Polytechnic Institute, Troy, New York. 1990. – Forschungsbericht
- [62] BRONSTEIN ; SEMENDJAJEW ; MUSIOL ; MÜHLIG: *Taschenbuch der Mathematik*. Harri Deutsch, 2001
- [63] ORTEGA, R. ; SPONG, M.: Adaptive motion control of rigid robots: A tutorial. In: *Automatica* 25 (1989), S. 877–888

- [64] BRUNOTTE, C.: *Regelung und Identifizierung von Linearmotoren für Werkzeugmaschinen*, Technische Universität Braunschweig, Diss., 2001
- [65] ROCCO, P.: Stability of PID Control for Industrial Robot Arms. In: *IEEE Transactions on Robotics and Automation* 12 (1996), S. 606–614
- [66] SICILIANO, B. (Hrsg.) ; KHATIB, O. (Hrsg.): *Handbook of Robotics*. Springer Verlag, 2008
- [67] BERNSTEIN, D. S.: *Matrix Mathematics Theory, Facts and Formulas with Application to Linear Systems Theory*. Princeton University Press, 2005
- [68] KUYPERS, F.: *Klassische Mechanik*. Wiley-VCH, 1997